Extrait

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et on note par $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E, (une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel supplémentaire à une droite vectorielle dans E. La matrice transposée de M est notée ${}^tM$. Si $M \in E$, on note $\text{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $[\![1, n]\!] = \{1, ..., s\}$.
On définit l'application trace, notée Tr, de E vers $\mathbb{R}$ comme suit, pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, $\text{Tr}(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}$.
L'objet du problème est de montrer, dans la partie V, que tout hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible et dans la partie VI, que tout hyperplan vectoriel de E qui est muni d'un produit scalaire, contient au moins une matrice orthogonale.

Partie I
Étude de quelques propriétés de l'application trace

1. (a) Montrer que Tr est une forme linéaire.

(b) Montrer que pour tous éléments A et B de E, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(({}^tA)({}^tB))$.

(c) Déterminer la dimension de $\ker \text{Tr}$.

(d) Montrer que $E = \ker \text{Tr} \oplus \text{Vect}(I_n)$.

(e) Vérifier que $\ker \text{Tr}$ est un hyperplan de E qui contient au moins une matrice inversible.

2. Soit φ l'application qui, à toute matrice M de E associe $\varphi(M) = M + \text{Tr}(M) I_n$.

(a) Montrer que φ est un automorphisme de E.

(b) i. Déterminer $E_1(\varphi) = \{M \in E;\ \ \varphi(M) = M\}$.

ii. Montrer que $E_{n+1}(\varphi) = \{M \in E;\ \ \varphi(M) = (n+1)M\} = \text{Vect}(I_n)$.

3. Soit J une matrice non nulle de E dont la trace est nulle. On considère ψ l'endomorphisme de E qui, à toute matrice M de E associe $\psi(M) = M + \text{Tr}(M) J$.

Vérifier que : $\psi^2 - 2\,\psi + \text{Id} = \text{O}$

Partie II
Un premier résultat préliminaire

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimensions respectivement finies $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit u une application linéaire de F vers G, de rang r tel que $r \in \mathbb{N}$. $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à m lignes et p colonnes.

1. Soit F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F, on considère l'application $v : F_1 \to \text{Im}(u)$ telle que $x \longmapsto v(x) = u(x)$. Montrer que v est un isomorphisme.

2. On suppose que $0 < r < \min(p, m)$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de F, telle que $(e_1, ..., e_r)$ soit une base de F_1 et $(e_{r+1}, ..., e_p)$ une base de $\ker u$. On pose, pour tout entier naturel $i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i = v(e_i)$.

(a) Montrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_m)$ de vecteurs de G, telle que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ soit une base de G.

(b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

3. En déduire que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, si $0 < r = \mathrm{rg}(M) < \min(m, p)$, alors il existe deux matrices inversibles S et T respectivement de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$ avec $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et I_r la matrice identité de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$.

4. Quelle est la forme de la matrice $J_{m,p,r}$, dans chaque cas suivant, ($0 < r = p < m$), ($0 < r = m < p$), ($0 < r = m = p$) ? Justifier la réponse.

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

Soit L un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie s($s \in \mathbb{N}^*$). Notons $L^* = \mathscr{L}(L, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires de L. Soit $\mathscr{B} = (l_1, ..., l_s)$ une base de L. On note, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, l_i^* la forme linéaire sur L définie de la façon suivante, pour tout entier $j \in [\![1, s]\!]$, $l_i^*(l_j) = \delta_i^j$ où $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, le symbole de Kronecker.

1. Montrer que $\mathscr{B}^* = (l_1^*, ..., l_s^*)$ est une famille libre de L^*.

2. Soit $x \in L$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i l_i$, montrer que, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $l_j^*(x) = x_j$.

3. En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une famille génératrice de L^*.

4. En déduire la dimension de L^*.

Partie IV
Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

Soit A une matrice de E, on définit l'application ϕ_A de E vers $\mathbb{R}$, de la façon suivante, pour tout M de E, $\phi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Vérifier que ϕ_A est une forme linéaire sur E.

2. Soit h l'application définie de E vers E^* par $A \to h(A) = \phi_A$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, une matrice élémentaire $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1 \le k,l \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme suit, pour tout couple d'entiers $(k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, $e_{k,l} = \delta_k^i \delta_l^j$, (δ_k^i (resp. δ_l^j) est le symbole de Kronecker qui est défini dans la partie III).

(a) Vérifier que h est une application linéaire.

(b) i. On pose $A = (a_{k,l})_{1 \le k,l \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, calculer $\phi_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice de A.

ii. En déduire que h est injective.

(c) En déduire que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie V
Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

Soit H un hyperplan de E.

1. Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

2. Montrer qu'il existe une matrice B de E telle que $H = \ker(\phi_B)$.

3. On note $r = \mathrm{rg}(B)$ et on considère la matrice de E, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que P_1 est une matrice inversible.

(b) On suppose que $0 < r < n$ et on note $R_r = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $\left\{ \begin{array}{l} r_{i,i} = 1 \text{ si } 1 \leq i \leq r \\ r_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$. Montrer que P_1 appartient à $\ker(\phi_{R_r})$.

4. En déduire que tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

Fin extrait