Equation matricielle

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On considère p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On notera :

$M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels,
$GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{R})$,
$D_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_2(\mathbb{R})$ et
I la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles $\mathcal{R}(p)=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,/\,A^p=I\right\}$.

Dans les parties II et III, E désigne une $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$, et Id_E désigne l'identité de E.

Partie I : Etude générale

1. $\mathcal{R}(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?
2. Soit $A\in\mathcal{R}(p)$. Montrer que $A\in GL_2(\mathbb{R})$ et que $A^{-1}\in\mathcal{R}(p)$.
3. Soit $A\in\mathcal{R}(p)$ et $P\in GL_2(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP\in\mathcal{R}(p)$.
4. Montrer que $\mathcal{R}(p)\cap D_2(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.
5. On considère q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle d le plus grand diviseur commun à p et q. Montrer que $\mathcal{R}(p)\cap\mathcal{R}(q)=\mathcal{R}(d)$.

Partie II : Cas p=2

1. Soit $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ et $Q=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

1.a Exprimer la matrice PQ.

1.b En déduire que P est inversible ssi $ad-bc\neq 0$ et exprimer son inverse P^{-1} lorsque tel est le cas.

2. Soit A un élément de $\mathcal{R}(2)$ tel que $A\neq I$ et $A\neq -I$ et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

2.a Démontrer que $\ker(u-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(u+\mathrm{Id}_E)=E$.

2.b En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2.c Montrer qu'il existe quatre réels a,b,c et d tels que $ad-bc\neq 0$ et $A=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad+bc & -2ab\\ 2cd & -ad-bc\end{pmatrix}$.

Partie III : Cas p=3

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les ensembles $F=\ker(v-\mathrm{Id}_E)$ et $G=\ker(v^2+v+\mathrm{Id}_E)$ où $v^2=v\circ v$.

1.a Montrer que $F\cap G=\{0\}$.

1.b Soit $x\in E$. Montrer que $\dfrac{1}{3}(x+v(x)+v^2(x))\in F$ et que $\dfrac{1}{3}(2x-v(x)-v^2(x))\in G$.

En déduire que $E=F\oplus G$.

2. Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?

3. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.

3.a Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G}=(g_1,g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.

3.b En considérant le vecteur $v^2(g_2)+v(g_2)+g_2$, obtenir une contradiction.

4. On suppose dans cette question que F est de dimension 0.

4.a Montrer que $(e_1,v(e_1))$ est une base de E.

4.b En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que $M=\frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}$.