

Extrait

SECOND PROBLEME :

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient la relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M$ (1)

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ayant 2 lignes, 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- 1) Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
- 2) Calculer A^2 . En déduire que pour tout entier naturel non nul n , A^n vérifie la relation (1).
- 3) Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A .

- 4) Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

- 5) Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}, U^n = \alpha_n U$.

En déduire que toutes ses puissances $U^n, n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1).

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

- 6) Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

- 7) Etant donnée une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2 . On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2 .

- 8) En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$, dont on précisera pour chacun une base.

- 9) Etant données M et N deux matrices de E_2 , a-t-on nécessairement $M.N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $M_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}, h(\vec{j}) = \vec{i}, h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{Mat}_{B'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3 .

10) Représenter la matrice S .

11) Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3 .

12) Montrer que pour tous réels a, b et c , la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3 .

13) En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F .

14) Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $M_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\text{Mat}_{B''}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $M_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4 .

15) Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

16) Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ et de $\text{Im}(u)$.

17) Calculer $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$. Que remarque-t-on ?

18) Calculer $B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.

19) On note $C = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

Déduire des questions précédentes $\text{Mat}_C(u)$.

En déduire l'existence d'une matrice $P \in M_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1} .

20) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2 .

FIN