Topologie 1

Exercice 1

Défintion :
E un evn. N_1 et N_2 deux normes sur E.
N_1 est dite *dominée* par N_2 si et seulement si

$$\exists \alpha \geq 0 \ , \ N_1 \leq \alpha N_2$$

N.B : *Il est clair que deux normes sont équivalentes si et ssi l'une est dominée par l'autre.*
Dans la suite $E = C([0,1], \mathbb{K})$.
Pour $f \in E$, on notera :

$$||f||_\infty = Sup_{t\in[0,1]}|f(t)| \ , \ ||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \ , \ ||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Montrer que :

1) $||.||_1$ est dominée par $||.||_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
2) $||.||_2$ est dominée par $||.||_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
3) $||.||_1$ est dominée par $||.||_2$ mais ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ on note :
$||A||_\infty = Sup_{1\leq i\leq n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|) \ , \ ||A||_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2}$
Montrer que :

1) $||.||_\infty$ et $||.||_2$ sont deux normes sur $M_n(\mathbb{R})$
2) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \ ||AB||_\infty \leq ||A||_\infty.||B||_\infty$
3) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \ ||AB||_2 \leq ||A||_2.||B||_2$
4) Soit $\lambda \in S_p(A)$.
   Montrer que $|\lambda| \leq ||A||_\infty$

Exercice 3

1) Notons $E = \{f \in C^2([0,\pi], \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$.
   Notons aussi pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) = ||f + f''||_\infty \ et \ N_2(f) = ||f||_\infty + ||f''||_\infty$$

   i) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

ii) Montrer qu'elles sont équivalentes.
indice :
Soit $g \in C([0,\pi],\mathbb{R})$. On verra vers la fin de l'année que **la solution** sur $[0,\pi]$ de l'équation différentielle $(y''+y=g)$ avec les conditions initiales $(y(0)=y'(0)=0)$ est la fonction y définie par :

$$\forall x \in [0,\pi],\ y(x) = \int_0^x sin(x-t)g(t)dt$$

2) Mêmes questions pour N_1 et N_2 définies cette fois-ci sur $E = C^1([0,\pi],\mathbb{R})$ par :

$$N_1(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty \ et \ N_2(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

Exercice 4

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = Sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

1) Montrer que $||.||$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $N(X) = max_{1\le i\le n}|x_i|$.
Vérifier que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ N(AX) \le ||A||N(X)$$
3) En déduire que $||A|| = Sup_{N(X)=1}N(AX)$

Exercice 5

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \ et \ N_2(P) = Sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_1 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Etudier la convergence pour chacune de ces deux normes de la suite de terme général
$$P_n = \frac{1}{n}X^n$$
3) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 6

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Supposons que $(AB)^n \to O$.
Montrer que $(BA)^n \to O$.
2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Supposons que $A^n \to P \ et \ B^n \to Q$. Montrer alors que P et Q commutent.

3) Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Supposons que $A_n \to A$ *et* $A_n^{-1} \to B$.
Montrer que A est inversible et préciser A^{-1}

4) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Supposons que $A^n \to B$.
Montrer que B est la matrice d'un projecteur.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $S_p(A) \subset]-1, 1[$. Montrer que $A^n \to 0$.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Supposons que $A^n \to B$, où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Montrer que $B = 0$