

Problème 2

Partie I

1. Il est facile de calculer $\int_x^y e^t dt = e^y - e^x$. On a donc :

$$\int_x^y e^t dt = 1 \iff e^y - e^x = 1 \iff y = \ln(1 + e^x).$$

L'équation (E_x) possède donc une unique solution donnée par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

2. f , comme composée de fonctions croissantes, est croissante. En outre, si x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$, et si $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow 0$.

3. On calcule $f(x) - x$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln(1 + e^x) - x \\ &= \ln(e^x(1 + e^{-x})) - x \\ &= \ln(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 si x tend vers $+\infty$, et est toujours positive : la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe, et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

4. On a $1 + e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Il faut faire attention ici car le développement limité du $\ln$ se fait en 2, et non en 1 comme d'habitude. On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) &= \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)^2 \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

C admet donc en 0 une tangente d'équation $y = \ln 2 + \frac{x}{2}$. En outre, la courbe est située localement au-dessus de la tangente (car $f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} > 0$ si x petit).

5. A vous de jouer!

Partie II

1.a. On a :

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} [\arctan(y) - \arctan(x)].$$

Comme $\arctan(y) < \pi/2$ et $\arctan(x) > -\pi/2$,

$$\int_x^y \varphi(t) dt < 1.$$

1.b. Si c'est toujours inférieur strict à 1, cela ne peut jamais être égal à 1, et donc l'équation n'a pas de solutions.

1.c. $l = 0$. Le but de la partie II étant de nous montrer l'existence de f si $l \neq 0$, cette question prouve que la condition $l > 0$ n'est pas superflue.

2. C'est une simple reformulation :

$$\int_x^y \varphi(t) dt = 1 \iff \phi_x(y) = 1.$$

3.a. ϕ_x est continue, car dérivable comme rappelé par l'énoncé. En outre,

$$\phi'_x(u) = \varphi(u),$$

et cette quantité est strictement positive sauf en un nombre fini de points. ϕ_x est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, ϕ_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\phi_x(\mathbb{R})$. Et la solution de (E_x) , si elle existe, est unique!

3.b. Si l est réel, on applique la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$ avec $\varepsilon = l/2$. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que, si $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq l/2$. On a prouvé le résultat demandé avec $A = l/2$.

Si $l = +\infty$, c'est encore plus facile, car la définition d'une limite infinie s'applique!

3.c. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \phi_x(u) &= \int_x^{t_0} \varphi(t) dt + \int_{t_0}^u \varphi(t) dt \\ &\geq A(u - t_0) + \int_x^{t_0} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

$\phi_x(u)$ tend donc vers $+\infty$ si u tend vers $+\infty$. En particulier, il existe un $u \geq x$ tel que $\phi_x(u) > 1$.

3.d. ϕ_x est continue sur $\mathbb{R}$, vérifie $\phi_x(x) = 0$ et $\phi_x(u) > 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [x, u]$ tel que $\phi_x(y) = 1$: l'équation (E_x) admet une unique solution!

Partie III

1.

$$\phi_0(x) + 1 = \int_0^x \varphi(t) dt + \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt = \int_0^{f(x)} \varphi(t) dt = \phi_0(f(x)).$$

Maintenant, on sait que ϕ_0 est une bijection, et cette égalité est équivalente à :

$$f(x) = \phi_0^{-1}(\phi_0(x) + 1).$$

2. Il faut commencer à savoir ses théorèmes sur les fonctions réciproques, notamment ici que la fonction réciproque d'une fonction continue strictement croissante est une fonction continue strictement croissante. En particulier, f , par composition, est continue strictement croissante.
- 3.a. On rappelle que si $y = \phi_0(t)$, et si ϕ_0 est dérivable en x avec $\phi'_0(t) \neq 0$, alors ϕ_0^{-1} est dérivable en y , et :

$$(\phi_0^{-1})'(y) = \frac{1}{\phi'_0(t)}.$$

Ici, $\phi'_0 = \varphi$ ne s'annule pas, et donc ϕ_0^{-1} est C^1 . Par composition des dérivées, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = (\phi_0(x) + 1)' \times (\phi_0^{-1})'(\phi_0(x) + 1).$$

Pour $t = \phi_0^{-1}(\phi_0(x) + 1) = f(x)$, on applique le rappel précédent, et :

$$f'(x) = \varphi(x) \times \frac{1}{\phi'_0(f(x))} = \varphi(x) \times \frac{1}{\varphi(f(x))}.$$

- 3.b. Cette question est un peu plus délicate, car pour la traiter rigoureusement, il faut se souvenir de la démonstration de la dérivée d'une composée et d'un produit. On note $\tau(x_0, h)$ le taux d'accroissement de f en x_0 par rapport à la variable h .

$$\begin{aligned} \tau(x_0, h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{\phi_0^{-1}(\phi_0(x_0 + h) + 1) - \phi_0^{-1}(\phi_0(x_0) + 1)}{h} \\ &= \frac{\phi_0^{-1}(\phi_0(x_0 + h) + 1) - \phi_0^{-1}(\phi_0(x_0) + 1)}{\phi_0(x_0 + h) - \phi_0(x_0)} \times \frac{\phi_0(x_0 + h) - \phi_0(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

On note $X_h = \phi_0^{-1}(\phi_0(x_0 + h) + 1) = f(x_0 + h)$ et $X_0 = \phi_0^{-1}(\phi_0(x_0) + 1) = f(x_0)$, de sorte que

$$\phi_0(X_h) - \phi_0(X_0) = \phi_0(x_0 + h) - \phi_0(x_0).$$

On a alors :

$$\tau(x_0, h) = \frac{X_h - X_0}{\phi_0(X_h) - \phi_0(X_0)} \times \frac{\phi_0(x_0 + h) - \phi_0(x_0)}{h}.$$

Mais,

1. Si $h \rightarrow 0$, $X_h \rightarrow X_0$, et donc :

$$\frac{X_h - X_0}{\phi_0(X_h) - \phi_0(X_0)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{\phi'_0(X_0)} = \frac{1}{\varphi(f(x_0))} = +\infty.$$

- 2.

$$\frac{\phi_0(x_0 + h) - \phi_0(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi(x_0) \neq 0.$$

On a donc $\tau(x_0, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$: f n'est pas dérivable en x_0 , mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4.a. Immédiat!

4.b. On a $\phi_x(f(x)) = 1$, et $\phi_x(x) = 0$. Du fait que ϕ_x est strictement croissante, $x \leq f(x)$. D'autre part, si $x \geq a$, $\phi_x(x + \varepsilon) = \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(t) dt \geq \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} \geq 1$. On a donc aussi $f(x) \leq x + \varepsilon$, ce qui prouve l'encadrement demandé. La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote à la courbe représentative de f .

5. On fixe $l > \varepsilon > 0$. Soit a tel que $x \geq a \implies l - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq l + \varepsilon$. On a alors :

$$\int_x^{f(x)} (l - \varepsilon) dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \leq \int_x^{f(x)} (l + \varepsilon) dt,$$

soit encore

$$(l - \varepsilon)(f(x) - x) \leq 1 \leq (l + \varepsilon)(f(x) - x).$$

Après un petit calcul, si $x \geq a$,

$$x + \frac{1}{l + \varepsilon} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{l - \varepsilon}.$$

La droite d'équation $y = x + \frac{1}{l}$ est donc asymptote à la courbe représentative de l .

6.a. On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma &\iff y = f(x) \\ &\iff \int_x^y \varphi(t) dt = 1 \\ &\iff \int_x^y \varphi(-t) dt = 1 \\ &\iff \int_{-y}^{-x} \varphi(u) du = 1 \\ &\iff -x = f(-y) \\ &\iff (-x, -y) \in \Gamma, \end{aligned}$$

où on a successivement utilisé la parité de φ et le changement de variables $u = -t$.

6.b. Soit D la deuxième bissectrice du repère, d'équation $y = -x$. Si $M(x, y)$ est dans le plan, $M'(x', y')$ son symétrique (orthogonal) par rapport à D , alors :

$$\overrightarrow{MM'} \perp (-1; 1) \implies -(x' - x) + (y' - y) = 0.$$

D'autre part, puisque $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M' \in D$, on a : $x + x' = -(y + y')$. On obtient alors $y' = -x$ et $x' = -y$. Les coordonnées de M' sont donc $(-y, -x)$. A l'aide de la question précédente, ceci prouve que la courbe est symétrique par rapport à D .

Partie IV

1. On peut factoriser φ pour obtenir $\varphi(x) = (x^2 - 1)^2$. φ est continue, est strictement positive sauf si $x = 1$ ou $x = -1$, elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et est paire.
2. D'après les questions précédentes :
 - La droite $y = x$ est asymptote de C_f en $+\infty$ (la courbe est au-dessus de l'asymptote).
 - C_f possède la droite $y = -x$ pour axe de symétrie, ce qui permet de se restreindre à construire la moitié de la courbe.
 - On a $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $\varphi(x) = 0$: on a une tangente horizontale en les points d'abscisse 1 et -1.
 - C_f admet des tangentes verticales en les points pour lesquels $f(x) = 1$, c'est-à-dire en les points d'ordonnée 1 ou -1.

Nous vous laissons le soin de tracer la courbe!

FIN

