

## Calcul de cosinus par radicaux

Le but de ce problème est d'établir des formules permettant d'exprimer :

$$\cos \frac{\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{\pi}{17}$$

à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés.

### Partie I : Calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$

Soit l'équation :

$$(E) : z^5 - 1 = 0.$$

1. Résoudre  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$  en calculant les cinq racines de  $(E)$  sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre  $(E)$  par radicaux carrés :

2.a Déterminer la fonction polynomiale  $Q$  telle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$$

2.b Déterminer des réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 + b \left( z + \frac{1}{z} \right) + c$$

2.c Résoudre, en exprimant les solutions par radicaux carrés, l'équation :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

d'inconnue  $Z \in \mathbb{C}$ .

2.d Pour finir, résoudre l'équation

$$Q(z) = 0$$

en exprimant les solutions par radicaux carrés, éventuellement superposés.

3. Des questions précédentes, déduire des expressions par radicaux de :

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5} \text{ et } \sin \frac{\pi}{5}.$$

### Partie II : Calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$

1. On désigne par  $a$  et  $h$  deux réels et par  $n$  un entier naturel non nul.  
On pose :

$$C(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \text{ et } S(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh).$$

1.a On suppose  $\sin \frac{h}{2} = 0$ .

Calculer  $C(a, h)$  et  $S(a, h)$  en fonction de  $a$  et de  $n$ .

1.b On suppose  $\sin \frac{h}{2} \neq 0$ .

Etablir les formules :

$$C(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos \left( a + (n-1) \frac{h}{2} \right)}{\sin \frac{h}{2}} \text{ et } S(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \left( a + (n-1) \frac{h}{2} \right)}{\sin \frac{h}{2}}.$$

On pourra pour cela évaluer  $C(a, h) + iS(a, h)$  mais cette méthode n'est toutefois pas imposée.

2. Dans cette question, et les suivantes,  $\theta$  désigne le réel  $\pi/17$ .

On pose :

$$x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta$$

$$x_2 = \cos \theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta$$

2.a Montrer que  $x_1 > 0$ .

2.b Calculer la somme  $x_1 + x_2$  en s'aidant du résultat de la question II.1.b.  
On trouvera pour résultat un nombre rationnel simple.

2.c Calculer le produit  $x_1 x_2$ . On devra pour cela :

i) développer le produit des deux sommes  $x_1$  et  $x_2$ .

ii) appliquer au résultat obtenu la formule linéarisant le produit  $\cos a \cos b$

iii) en conclure  $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$ .

2.d Dédire de ce qui précède des expressions de  $x_1$  et  $x_2$  par radicaux carrés.

3. On pose ici :

$$y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta$$

$$y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta$$

$$y_3 = \cos \theta + \cos 13\theta$$

$$y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta$$

3.a Calculer en s'inspirant la question précédente les produits  $y_1 y_2$  et  $y_3 y_4$ .

3.b En déduire les expressions de  $y_1, y_2, y_3, y_4$  à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

4. Calculer  $\cos \theta \cos 13\theta$  et décrire une méthode qui permette d'exprimer  $\cos \theta$  à l'aide de radicaux carrés.  
Après résolution, non demandée, on obtient :

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1}{16} \left( 1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}} \right)$$