

CONCOURS COMMUN 2006

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

Jeudi 11 mai 2006 de 14h00 à 18h00

EXTRAIT

DEUXIÈME PROBLÈME.

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_n(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x lorsque c'est possible $f_0(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$.

Généralités sur f_n .

Soit n un entier naturel fixé.

1. Déterminer le domaine de définition D de f_n .
2. f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
3. f_n est-elle 2π -périodique ?
4. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur D tout entier. On justifiera sa réponse.

Étude de la fonction f_0 .

5. Étudier la dérivabilité de f_0 sur D . Déterminer l'expression de sa dérivée.
6. Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.
7. Déterminer le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
On rappelle que : $\sqrt{3}$ a pour valeur 1,732 comme valeur approchée par défaut à 10^{-3} près.
8. Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$. En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Utilisation d'une primitive de f_0 .

9. Déterminer une primitive de f_0 sur $\mathbb{R}$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt$.

Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x$.

10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation sans second membre (H) associée à (E) .

11. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a \cos(x) + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

12. Trouver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E) et qui vérifie : $h(0) = 1$.

Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)}$.

16. Déterminer le domaine de définition de g .

17. Montrer que g admet une limite finie l en 0.

On prolonge g par continuité en posant : $g(0)=l$.

18. Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 3 de g ainsi prolongée.

19. Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

On admet que g est dérivable sur $]0,\pi]$ et que pour tout x de $]0,\pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.

20. Montrer que g est une bijection entre $[0,\pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n .

Soit n un entier naturel non nul.

21. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n , alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.

22. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $[0,\pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

23. Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN

