

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traiter dans l'ordre souhaité.

Exercice

Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (Noté sur 4 points sur 20)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et n un entier naturel, avec $n \geq 2$. On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot, \cdot)$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $v_k = e_k - e_{k+1}$.

On note H la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par : $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

0.1. Structure de H

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

0.1.1. Vérifier que ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

0.1.2. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

0.2. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est une base de H .

0.3. Construction d'une base orthogonale de H

Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et on note p_k la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F_k .

0.3.1. Montrer que, pour tout $(j, k) \in \{1, \dots, n-1\}^2$, $(v_j | v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{j-1, j+1\}, \\ 2 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \notin \{j-1, j, j+1\}. \end{cases}$

0.3.2. Considérons la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k) \end{cases}$$

Montrer que

- i) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$
- ii) $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est une famille orthogonale de H .

0.3.3. Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$

Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

(i) Montrer que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = ((v_j | v_\ell))_{1 \leq j, \ell \leq k-1}$ est la matrice de Gram associée à la famille $(v_1, \dots, v_{k-1})$, et B_k désigne le vecteur colonne de composantes $(v_1 | v_k), \dots, (v_{k-1} | v_k)$.

(ii) Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit $\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$.

(iii) Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0)$, le -1 étant situé à la $(k+1)$ -ième place.

0.4. Donner une base orthonormée de H .

NB : J'ai modifié l'énoncé de la question marquée en bleu.

0.1. Structure de H

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

0.1.1. Vérifier que ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

i) ψ forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$?

ψ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrons que ψ est linéaire.

Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\psi(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) = \lambda \psi(x_1, \dots, x_n) + \psi(y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned}\psi(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) &= \psi(\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + y_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k \\ &= \lambda \psi(x_1, \dots, x_n) + \psi(y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

ii) Montrer que $\psi \neq 0$.

On a $\psi(e_1) = 1 \neq 0$, donc $\psi \neq 0$

0.1.2. En déduire que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

i) H est de $\mathbb{R}^n$?

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}$$

$$= \ker(\psi)$$

D'où H est le noyau de la forme linéaire non nulle ψ de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

et donc H est un sev de $\mathbb{R}^n$ et $\dim(H) = n-1$



0.2. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est une base de H .

i) D'abord : $(\forall 1 \leq k \leq n-1, v_k \in H)$ Car :

$$v_k = e_k - e_{k+1} = (x_1, \dots, x_n), \text{ où } \begin{cases} x_k = 1 \\ x_{k+1} = -1 \\ x_i = 0 \text{ si } i \notin \{k, k+1\} \end{cases}$$

Ainsi : $x_1 + \dots + x_n = 0$

ii) On a $\text{Card}(v_1, \dots, v_{n-1}) = n-1 = \dim(H)$, alors il suffit de montrer que $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est libre.

Soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k = 0$.

Il que $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

$$\text{On a } \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (e_k - e_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k - \sum_{k=2}^n \alpha_{k-1} e_k = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) e_k - \alpha_{n-1} e_n = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ \forall 2 \leq k \leq n-1, d_k = d_{k-1} \\ d_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} \end{cases}$$

D'où $d_1 = d_2 = \dots = d_{n-1} = 0$ □

0.3. Construction d'une base orthogonale de H

Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et on note p_k la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F_k .

0.3.1. Montrer que, pour tout $(j, k) \in \{1, \dots, n-1\}^2$, $(v_j | v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{j-1, j+1\}, \\ 2 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \notin \{j-1, j, j+1\}. \end{cases}$

Cas 1 : Si $k \in \{j-1, j+1\}$

Si $k = j-1$

$$(v_j | v_k) = (v_j | v_{j-1})$$

$$= (e_j - e_{j+1} | e_{j-1} - e_j)$$

$$= -1 \quad ((e_1, \dots, e_n) \text{ base orthogonale})$$

Si $k = j+1$

$$(v_j | v_k) = (v_j | v_{j+1})$$

$$= (e_j - e_{j+1} | e_{j+1} - e_{j+2})$$

$$= -1 \quad ((e_1, \dots, e_n) \text{ base orthogonale})$$

Case 2: Si $k=j$

$$\begin{aligned} (v_j | v_k) &= (v_j | v_j) \\ &= (e_j - e_{j+1} | e_j - e_{j+1}) \\ &= 1 + 1 = 2 \quad (\text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ bon}) \end{aligned}$$

Case 3: Si $k \notin \{j-1, j, j+1\}$

$$\begin{aligned} (v_j | v_k) &= (e_j - e_{j+1} | e_k - e_{k+1}) \\ &= \underbrace{(e_j | e_k)}_{=0} - \underbrace{(e_j | e_{k+1})}_{=0} - \underbrace{(e_{j+1} | e_k)}_{=0} + \underbrace{(e_{j+1} | e_{k+1})}_{=0} \\ &\quad \text{car } j \neq k \quad \text{car } k \neq j-1 \quad \text{car } k \neq j+1 \quad \text{car } j \neq k \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.2. Considérons la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = v_1 \\ \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k) \end{cases}$$

Montrer que

i) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$

Faisons la démonstration par récurrence sur $1 \leq k \leq n-1$:

Initialisation :

Pour $k=1$.

$\text{vect}(v_1) = \text{vect}(\varepsilon_1)$ est vérifiée puis que $\varepsilon_1 = v_1$.

Hérédité :

Soit $1 \leq k \leq n-2$.

Supposons que $\text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.

Et montrons que $\text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$.

Procédons par double inclusion :

A) $\text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \supset \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$?

Il suffit de vérifier que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1} \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$.

On a par hypothèse de récurrence que :

$$\text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).$$

Alors, $\forall 1 \leq i \leq k$, on a

$$\varepsilon_i \in \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{vect}(v_1, \dots, v_k) \subset \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \varepsilon_{k+1} &= \underbrace{v_{k+1}}_{\substack{\in \text{vect}(v_1, \dots, v_k) \\ \rightarrow \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1})}} - \underbrace{p_k(v_{k+1})}_{\in \text{vect}(v_1, \dots, v_k) \subset \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1})} \\ &\rightarrow \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \end{aligned}$$

D'où $\varepsilon_{k+1} \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$.



B) $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$?

Il suffit de vérifier que $v_1, \dots, v_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$.

On a par hypothèse de récurrence que :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Alors si $1 \leq i \leq k$, on a

$$v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$$

$v_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$?

On a $e_{k+1} = v_{k+1} - p_k(v_{k+1})$

$$\Rightarrow v_{k+1} = \underbrace{e_{k+1}}_{\in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})} - \underbrace{p_k(v_{k+1})}_{\substack{\text{hypothèse de récurrence} \\ \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})}} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$$

Donc $v_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ □

ii) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille orthogonale de H . ?

Rappel : $(x - \frac{p(x)}{F}) \in F^\perp$

Soient $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tels que $i \neq j$.

Montrons que $(e_i | e_j) = 0$.

Supposons par exemple que $i < j$.

On a $\varepsilon_j = v_j - p_{j-1}(v_j) \in \left(\text{vect}(v_1, \dots, v_{j-1}) \right)^\perp$, d'après le
rappel.

$$\text{Or } \text{vect}(v_1, \dots, v_{j-1}) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$$

$$\text{Alors } \varepsilon_j \in \left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1}) \right)^\perp$$

Et puis que $\varepsilon_i \in \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{j-1})$ (car $i < j$)

$$\text{Alors } (\varepsilon_j | \varepsilon_i) = 0$$



3.3. Détermination de ε_k pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$

Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

(i) Montrer que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = ((v_j | v_\ell))_{1 \leq j, \ell \leq k-1}$ est la matrice de Gram associée à la famille $(v_1, \dots, v_{k-1})$, et B_k désigne le vecteur colonne de composantes $(v_1 | v_k), \dots, (v_{k-1} | v_k)$.

Il s'agit de montrer que :

$$A_k \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1 | v_k) \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_k) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned} A_k \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (v_1 | v_1) & \dots & (v_1 | v_{k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (v_{k-1} | v_1) & \dots & (v_{k-1} | v_{k-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (v_1 | v_1) \alpha_1 + \dots + (v_1 | v_{k-1}) \alpha_{k-1} \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_1) \alpha_1 + \dots + (v_{k-1} | v_{k-1}) \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (v_1 | \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j) \\ \vdots \\ (v_{k-1} | \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$$

$$= \begin{pmatrix} (v_1 | v_k - \varepsilon_k) \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_k - \varepsilon_k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (v_1 | v_k) - \underbrace{(v_1 | \varepsilon_k)}_{=0} \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_k) - \underbrace{(v_{k-1} | \varepsilon_k)}_{=0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Or : } (\forall 1 \leq i \leq k-1, (v_i | \varepsilon_k) = 0)$$

$$\text{Car } \begin{cases} v_i \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) \\ \text{et que } \varepsilon_k \in \left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) \right)^\perp \end{cases}$$

puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ famille orthogonale.

D'où

$$A_k \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1 | v_k) \\ \vdots \\ (v_{k-1} | v_k) \end{pmatrix}$$

□

(ii) Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}.$$

On a $A_k = ((v_j | v_l))_{1 \leq j, l \leq k-1}$

Or $(v_j | v_l) = \begin{cases} -1 & \text{si } l \in \{j-1, j+1\} \\ 2 & \text{si } j=l \\ 0 & \text{si } l \notin \{j-1, j, j+1\} \end{cases}$

d'après 0.3.1

Alors $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Et on a $B_k = \begin{pmatrix} (v_1 | v_k) \\ \vdots \\ (v_{k-2} | v_k) \\ (v_{k-1} | v_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'après 0.3.1

Ainsi, le système $A_k X = B_k$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$$



(iii) Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0)$, le -1 étant situé à la $(k+1)$ -ième place.

2) Résoudre le système $A_k X = B_k$

$$A_k X = B_k \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ 3x_1 = x_3 \\ 4x_1 = x_4 \\ \vdots \\ (k-2)x_1 = x_{k-2} \\ (k-1)x_1 = x_{k-1} \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = x_2 \\ 2x_1 = x_3 \\ 3x_1 = x_4 \\ \vdots \\ (k-2)x_1 = x_{k-2} \\ (k-1)x_1 = x_{k-1} \\ [2(k-1) - (k-2)]x_1 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = x_2 \\ 2x_1 = x_3 \\ 3x_1 = x_4 \\ \vdots \\ (k-2)x_1 = x_{k-2} \\ (k-1)x_1 = x_{k-1} \\ x_1 = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{k} \\ x_2 = -\frac{2}{k} \\ x_3 = -\frac{3}{k} \\ \vdots \\ x_{k-1} = -\frac{(k-1)}{k} \end{cases}$$



b) On déduit que $\varepsilon_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0)$; le (-1) étant placé à la $(k+1)$ -ième place

$$\text{On a } \varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$$

d'après a), on a : $(\forall 1 \leq j \leq k-1, \alpha_j = \frac{-j}{k})$

d'où :

$$\varepsilon_k = (e_k - e_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} (e_j - e_{j+1})$$

$$= (e_k - e_{k+1}) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (j e_j - j e_{j+1})$$

$$= (e_k - e_{k+1}) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (j e_j - (j+1) e_{j+1}) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} e_{j+1}$$

On a créé une télescopie

$$= (\cancel{e_k} - e_{k+1}) + \frac{1}{k} (e_1 - \cancel{k e_k}) + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} e_{j+1}$$

$$= \frac{1}{k} e_1 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} e_{j+1} - e_{k+1}$$

$$= \frac{1}{k} (e_1 + e_2 + \dots + e_k) - e_{k+1}$$

$$\left(\varepsilon_k = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0 \right) \right) \quad \square$$

↓
place à (k+1)-ième place

0.4. Donner une base orthonormée de H .

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est une base orthogonale de H .

Une base orthonormée de H est : $\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_{n-1}}{\|\varepsilon_{n-1}\|} \right)$.

On a $\varepsilon_1 = v_1 = e_1 - e_2$ et $\|\varepsilon_1\| = \sqrt{2}$

$\forall 1 \leq k \leq n-1, \varepsilon_k = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0 \right)$
↓
(k+1)-ième place

$$\Rightarrow \|\varepsilon_k\| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2}}_{k \text{ fois}} + 1} = \sqrt{\frac{1}{k} + 1} \quad \square$$

Remarque

On a en fait que :

$\forall 1 \leq k \leq n-1, \varepsilon_k = \left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, -1, 0, \dots, 0 \right)$
↓
place à la (k+1)-ième place

Une base orthonormée de H est alors :

$$\left(\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\frac{1}{k} + 1}} \right)_{1 \leq k \leq n-1}$$

Fin