Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quel est le degré de P_n ?
   (b) Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geqslant 2n+1$?
2. (a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
   (b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}.$$

   (b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.
   (c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Solution :

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quel est le degré de P_n ?
   (b) Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geqslant 2n+1$?

1) a) $\deg(P_n) = 2n$

b) Soit $k \geqslant 2n+1$. On a $\deg(P_n) = 2n$, alors $P_n^{(k)} = 0$.

2. (a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
   (b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

2) a) On a $P_n(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

0 et $\dfrac{a}{b}$ sont les racines du polynôme P_n.

Chacune est de multiplicité égale à n.

b) On a que 0 et $\frac{a}{b}$ sont les racines du polynôme P_n de multiplicités n, alors on a :

$P_n^{(k)}(0)=0$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)=0$, et ce pour tout $0\leq k\leq n-1$

3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.

(a) Montrer que, pour tout réel x,

$$P_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n}C_k^p\frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}.$$

3)a) On a $n\leq k\leq 2n$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a d'après Leibniz :

$P_n(x)=\dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ rappel

$$P_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{k}C_k^p\,(x^n)^{(p)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-p)}$$

$(x^n)^{(p)}=0$ si $p>n$, alors :

$$P_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}C_k^p\,(x^n)^{(p)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-p)}$$

De même, $\left((a-bx)^n\right)^{(k-p)}=0$ si $k-p>n$ i.e. si $p<k-n$

D'où : $$P_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n}C_k^p\,(x^n)^{(p)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-p)} \quad *$$

D'autre part, pour $k-n\leq p\leq n$, on a :

$$(x^n)^{(p)}=n\cdots(n-p+1)\,x^{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$$

Et $\left((a-bx)^n\right)^{(k-p)} = \dfrac{n!}{(n-(k-p))!}(a-bx)^{n-(k-p)} \times (-b)^{k-p}$

Remplaçons dans $*$, on obtient :

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \frac{n!}{(n-k+p)!}(a-bx)^{n-k+p} \times (-b)^{k-p}$$

D'où l'expression voulue :

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}$$

---

3) b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.

$P_n^{(k)}(0) = 0$?! (Erreur à éviter)

$\begin{cases} \text{Si } n-p \geq 1, \text{ la fonction } x \longmapsto x^{n-p} \text{ s'annule pour } x=0 \\ \text{et si } n-p=0, \text{ la fonction } x \longmapsto x^{n-p} = 1 \text{ vaut } 1 \text{ pour } x=0 \end{cases}$

Ainsi : $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{1}{\cancel{n!}} C_k^n \dfrac{\cancel{n!}}{0!} \cdot \dfrac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^{k-n} \cdot a^{2n-k}$

« On considère $n-p=0$, càd $p=n$ »

$$P_n^{(k)}(0) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^{k-n} \cdot a^{2n-k}$$

$P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = ?$

Pour $x = \frac{a}{b}$, $a - bx = 0$.

On procède comme ci-dessus, et on considère $n-k+p=0$;

càd $p = k-n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \cancel{\frac{1}{n!}}\, C_k^{k-n} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(2n-k)!} \cdot \frac{n!}{0!} \cdot (-b)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} \\ \text{avec } P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^n \cdot b^{k-2n} \cdot a^{2n-k}$$

$$= C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^n \cdot (-b)^{k-2n} \cdot (-1)^{k-2n} \cdot a^{2n-k}$$

$$P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^{k-n} \cdot a^{2n-k} \cdot (-1)^k$$

$$P_n^{(k)}(0) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot (-b)^{k-n} \cdot a^{2n-k}$$

(c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

$$P_n^{(k)}(0) = \underbrace{C_k^n}_{\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot \underbrace{(-b)^{k-n}}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{a^{2n-k}}_{\in\mathbb{Z}}$$

$\in\mathbb{Z} \longrightarrow$ car $2n-k \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow$ car $k-n \in \mathbb{N}$

Reste à vérifier que $\frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{N}$; ce qui est vrai ; en effet :

$n \leq k \leq 2n \Rightarrow 2n-k \leq 2n-n = n$

$\Rightarrow (2n-k)! \,/\, n!$, et donc $\frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{N}$ $\square$

Fin