Probabilités (Partie 3)

Résumé

Dans toute cette partie, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

1) Fonction de répartition d'une var

Déf

Soit X une var sur Ω.
La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$\boxed{F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; F_X(x) = P(X \leq x)}$$

Déf

1) Soient X et Y deux var.
La fonction de répartition du couple (X,Y), notée $F_{(X,Y)}$, est définie par :

$$\boxed{F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)}$$

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.
La fonction de répartition de $(X_1, \dots, X_n)$, notée $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ est définie par :

$$F_{(X_1, \dots, X_n)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Propriétés

Soient X une var et F sa fonction de répartition. On a :

1) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

   i) $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = P(X < a)$

   ii) F continue en $a \iff P(X = a) = 0$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Prop

Soit X une var.

Si on connait la loi de X, alors on connaitra sa fonction de répartition. Et inversement.

Corollaire

Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors toutes les expressions suivantes sont égales :

1) $P(a \leq X \leq b)$

2) $P(a < X \leq b)$

3) $P(a \leq X < b)$

4) $P(a < X < b)$

5) $F_X(b) - F_X(a)$

2) Image d'une var

Notations

1) Soient $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une var et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

La composée $f\circ X$ se note $f(X)$.

2) Si X et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux var et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$f\circ(X,Y)$ se note $f(X,Y)$.

3) Si $X_1,\dots,X_n:\Omega\to\mathbb{R}$ des var et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

$f\circ(X_1,\dots,X_n)$ se note $f(X_1,\dots,X_n)$.

Prop

1) Si X et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux var et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue, alors $f(X,Y)$ est aussi une var.

2) Si $X_1,\dots,X_n:\Omega\to\mathbb{R}$ des var et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue alors $f(X_1,\dots,X_n)$ est aussi une var.

Prop

Si $\begin{pmatrix} \forall n\in\mathbb{N},\ X_n \text{ var} \\ (X_n)_n \text{ converge simplement vers } X \end{pmatrix}$ alors X var.

3) Indépendance héritée

Prop (Rappel)

Si les var X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes, pour toutes f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues ou monotones.

Prop

Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_s$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_s)$ sont deux var indépendantes, où f et g continues.

4) Un système complet d'événements usuel

Prop

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète.

Supposons que $X(\Omega) = D$ est dénombrable. On a :

1) $(X = d)_{d \in D}$ est un système complet d'événements.

2) $\big(P(X = d)\big)_{d \in D}$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{d \in D} P(X = d) = 1$$

5) Espérance d'une var discrète

Déf 1

Soit X une var discrète.

Supposons que $D = X(\Omega)$ est dénombrable.

1) On dit que X possède une espérance si et ssi la famille $\left(x P(X=x)\right)_{x \in D}$ est sommable.

2) Dans ce cas, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in D} x P(X=x)$$

Prop 2

Soit X une var discrète positive.

On a :

$$\boxed{E(X) = 0 \Leftrightarrow (X = 0 \text{ presque sûrement})}$$

6) Propriétés de transfert

Prop

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var discrète, où $D = X(\Omega)$ dénombrable.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

1) $f(X)$ possède une espérance si et ssi $\left(f(x) P(X=x)\right)_{x \in D}$ est une famille sommable.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in D} f(x) P(X=x)$$

Prop

Soit (X,Y) un couple de var discrètes.

Notons $X(\Omega)=\{x_i \,/\, i\in\mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j \,/\, j\in\mathbb{N}\}$, où les x_i (resp. y_j) sont distincts deux à deux.

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. On a :

1) La var $f(X,Y)$ possède une espérance si et ssi la famille

$$\Big(f(x_i,y_j)\,P(X=x_i,Y=y_j)\Big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable.}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$E\big(f(X,Y)\big)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} f(x_i,y_j)\,P(X=x_i,Y=y_j)$$

Prop

Soit (X,Y) un couple de var discrètes.

Si X et Y possèdent une espérance alors $(X+Y)$ la possède aussi, et on a :

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

Corollaire

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes possédant des espérances, alors pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la var $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ possède aussi une espérance, et on a:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i)$$

Prop

Si X et Y sont deux var discrètes indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit XY possède aussi une espérance, et on a:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Corollaire

Soit $n \geq 2$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit $(X_1 \cdots X_n)$ possède aussi une espérance, et on a:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

7) Moments _ Variances

Déf (Rappel)

X var et $k \in \mathbb{N}^*$.

Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$, sous réserve d'existence.

NB

1) X possède un moment d'ordre k $\Longleftrightarrow$ $E(X^k)$ existe.

2) X possède un moment d'ordre 1 $\Longleftrightarrow$ $E(X)$ existe.

3) X possède un moment d'ordre 2 $\Longleftrightarrow$ $E(X^2)$ existe.

Prop

X var.

1) Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède une espérance.

2) En général, Si X possède un moment d'ordre k, alors X possède tout moment d'ordre inférieur à k.

Corollaire

Si X possède un moment d'ordre k, alors il en est de même pour $(X+a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Prop et Déf

Soit X une var possédant un moment d'ordre 2 ; (càd $E(X^2)$ existe)

1) $E\left((X-E(X))^2\right)$ existe.

2) La variance de X est :

$$V(X) = E\left((X-E(X))^2\right)$$

3) L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Prop (Inégalité de Cauchy – Schwarz)

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, alors on a :

1) XY possède une espérance.

2) $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$

Prop et déf

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2.

1) La var $(X-E(X))(Y-E(Y))$ possède une espérance.

2) $E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$ s'appelle la covariance de X et Y, et se note $C(X,Y)$.

3) $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

4) $|C(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

Prop et déf

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2, telles que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.

1) Le coéfficient de corrélation de X et Y est :

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

2) $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$.

Prop

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 alors :

1) $X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2.

2) $V(X+Y) = V(X) + 2C(X,Y) + V(Y)$

Prop

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 et indépendantes, alors

1) $C(X,Y) = 0$

2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Corollaire

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes et possédant un moment d'ordre 2, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aussi, et on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Prop (Variances des var discrètes usuelles)

X	$X = c$ Constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$X \sim \mathcal{G}(p)$	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
$E(X)$	c	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$V(X)$	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

8) Fonction génératrice d'une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déf

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction génératrice de X est :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} G_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & G_X(t) = E\left(t^X\right) \end{array}}$$

Prop

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \; G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n}$$

Prop

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On rappelle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$$

1) Le rayon de convergence de cette série entière est $\geqslant 1$.
2) $G_X(1) = 1$
3) Cette série entière converge normalement sur $[-1, 1]$.
4) G_X est continue sur $[-1, 1]$.
5) G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Prop

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La connaissance de la loi de X est équivalente à la connaissance de sa fonction génératrice.

Prop

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

1) i) X possède une espérance $\Longleftrightarrow$ G_X est dérivable en 1

ii) Dans ce cas, $\boxed{G_X'(1) = E(X)}$

2) i) X possède un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1.

ii) Dans ce cas, $\boxed{G_X''(1) = E\big(X(X-1)\big)}$

À retenir

1) Il suffit que le RCV $R > 1$ de la SE $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)t^n$ pour que $E(X)$ et $E(X^2)$ existent (donc $V(X)$ existe).

2) Disposant de G_X, qui est deux fois dérivable en 1, on tire $G_X''(1) = E(X(X-1))$, puis on tire $E(X^2)$ et par suite $V(X)$.

NB

Il faut être capable de déterminer les fonctions génératrices des lois usuelles discrètes, et de retrouver par la suite leurs espérances et variances.

Prop 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

On a :

$$\boxed{G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \cdots G_{X_n}}$$

---

9) Inégalité de Jensen

Prop

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Soit X une var discrète telle X et $f(X)$ possèdent des espérances.

On a :

$$\boxed{f(E(X)) \leq E(f(X))}$$

---

10) Loi de la somme de deux var discrètes indépendantes

Prop

Soient X et Y deux var discrètes et indépendantes.

Notons $D = X(\Omega)$, $D' = Y(\Omega)$ et $S = X+Y$.

On a :

1) S est aussi une var discrète.

2) L'ensemble des valeurs possibles est

$$\Delta = S(\Omega) = \{u+v \,/\, u \in D \text{ et } v \in D'\}$$

3) La loi de S est donnée par :

$$\forall s \in \Delta,\ P(S=s) = \sum_{u \in D} P(X=u)\,P(Y=s-u)$$

$$\forall s \in \Delta,\ P(S=s) = \sum_{v \in D'} P(X=s-v)\,P(Y=v)$$

Formules dites de Convolution discrètes des lois de X et Y

11) Modes de convergences

$\boxed{\text{HPF}}$: Hors programme français

a) Convergence en probabilité

Déf

$\boxed{\text{HPF}}$

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \left(P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \right) = 0$$

Prop

$\boxed{\text{HPF}}$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit X une var.

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

Alors $(f_n(X))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

b) Convergence en loi

Déf

HPF

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

D étant l'ensemble des points de discontinuité de F_X.

On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et ssi :

$$\boxed{\left(F_{X_n}\right)_n \text{ converge simplement vers } F_X \text{ sur } \mathbb{R}\setminus D}$$

Càd :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus D,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n \leqslant x) = P(X \leqslant x)}$$

Prop

HPF

Supposons que $(X_n)_n$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(X_n)_n$ converge en loi vers X

2) $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

Exercice classique à savoir résoudre

Soit $\lambda > 0$.

Soit $(p_n)_n$ une suite de réels positifs vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$$

Mq que $(X_n)_n$ converge en loi vers une var suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

Càd :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Prop

HPF

1) La convergence en probabilité implique la convergence en loi.
2) La réciproque est en général fausse.

12) Loi faible des grands nombres

À savoir !

⚠ Si les var X et Y ont la même loi alors :

$$E(X) = E(Y) \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y)$$

Prop (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

Notons pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Soit μ l'espérance commune à toutes les var X_n.

On a :

$\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ Converge en probabilité vers μ.

Càd :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Fin