

Extrait du CNC 2024

Maths 2- MP

Problème.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n , $n \geq 1$ et par $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des endomorphismes de E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$ où id_E désigne l'application identité de E . On note $\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f)$ le polynôme caractéristique de f et on rappelle que $\chi_f(f) = 0$ où 0 désigne l'application nulle de E .

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra introduire le polynôme caractéristique de M défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0$, le plus petit entier naturel non nul p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f .

Partie 1: Noyaux itérés

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note pour tout entier naturel k , $\mathcal{N}_k = \text{Ker}(f^k)$ et $\mathcal{I}_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. En déduire que $(\dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
3. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel q tel que $\mathcal{N}_q = \mathcal{N}_{q+1}$.
4. Montrer que $\mathcal{I}_q = \mathcal{I}_{q+1}$.
5. Montrer que $\mathcal{N}_q \oplus \mathcal{I}_q = E$,
6. On considère pour tout entier naturel k , φ_k la restriction de f à $\mathcal{I}_k$.
 - a) Montrer que $\dim \mathcal{I}_k - \dim \mathcal{I}_{k+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathcal{I}_k)$.
 - b) En déduire que la suite $(\dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de rang $n - 1$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à U . ($E = \mathbb{C}^n$)

1. Soient r et s deux entiers naturels et v la restriction de u^s à $\text{Im}(u^r)$.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$.
 - b) Montrer que $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$.
 - c) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$.
 - d) En déduire que pour tout entier naturel i , $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$.
2. On suppose de plus que $U^n = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$.
 - b) Montrer que l'indice de nilpotence de u est égal à n .
 - c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .
 - d) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_e$.
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang $n - 1$ sont semblables.

Partie 3 : Réduction d'un endomorphisme particulier

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

On considère $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ le polynôme caractéristique χ_f de f , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k})$

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, le sous-espace vectoriel F_k est stable par f .
2. Montrer que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.
3. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on considère l'endomorphisme φ_k de F_k tel que, pour tout $x \in F_k$, $\varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x$.
 - a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k .
 - b) Déterminer, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, la dimension de F_k .
 - c) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, l'indice de nilpotence de φ_k est m_k .
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, tel que chaque bloc

est une matrice de $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ de la forme $A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$

Fin Extrait