Théorème spectral et séries entières

X MP 2023, Maths B

PREMIÈRE PARTIE

1. La somme de deux fonctions de $\mathscr{D}_\rho$ est encore dans $\mathscr{D}_\rho$: en effet, si

$$\forall t \in \mathrm{U}_\rho \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n$$

alors

$$\forall t \in \mathrm{U}_\rho \qquad f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, t^n.$$

$$\boxed{\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}) \text{ est stable par somme.}}$$

On en déduit, coefficient par coefficient, que

$$\boxed{\mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]\big) \text{ et } \mathscr{D}\big(\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})\big) \text{ sont stables par somme.}}$$

2. Soient $f, g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$.
Le produit de deux séries entières $\sum a_n\, t^n$ et $\sum b_n\, t^n$ de rayons respectifs R_a et R_b est la série $\sum c_n\, t^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

et elle est de rayon $\mathrm{R}_c \geqslant \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ et sur $\mathrm{U}_{\mathrm{R}_c}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n\right) = f(t)\, g(t)$$

Notamment, si $\mathrm{R}_a \geqslant \rho$ et $\mathrm{R}_b \geqslant \rho$, alors $\mathrm{R}_c \geqslant 0$, ce qui montre que $f \cdot g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$.

$$\boxed{\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}) \text{ est stable par produit.}}$$

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]$,

$$(\mathrm{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

est une fonction somme de produit de fonctions développables en série entière sur U_ρ, donc développable en série entière sur U_ρ. Ainsi, $\mathrm{AB} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$.

$$\boxed{\mathscr{D}_\rho\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big) \text{ est stable par produit.}}$$

3. L'application

$$\pi : \begin{array}{rcl} \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{D}_r(\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f_{|\mathrm{U}_r} \end{array}$$

est linéaire.

❏ **Soit $f \in \ker \pi$.** Alors f est identiquement nulle sur U_r ; or les coefficients d'une série entière sont entièrement déterminés par les valeurs de f au voisinage de 0 :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

ce qui montre que f est identiquement nulle.

$$\boxed{\text{L'application } \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}) \to \mathscr{D}_r(\mathbf{R}) \text{ qui à } f \text{ associe sa restriction à } \mathrm{U}_r \text{ est injective.}}$$

4. Soit $0 < r < \rho$. On vérifie rapidement que

- pour tout $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$, la série $\sum a_n\, r^n$ converge absolument, donc $\|f\|_r$ est un réel positif (et pas $+\infty$) ;
- pour tout $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ tel que $\|f\|_r = 0$, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $f = 0$;
- si $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ et

$$\|\lambda f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda\, a_n|\; r^n = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; r^n = |\lambda|\; \|f\|_r \;\; ;$$

- si $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$ et $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n$ sont dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$, alors

$$\|f+g\|_r = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n + b_n|}_{\leqslant |a_n|+|b_n|}\; r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; r^n + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\; r^n = \|f\|_r + \|g\|_r \,.$$

$$\boxed{\text{Si } 0 < r < \rho, \text{ alors } \|\cdot\|_r \text{ est une norme sur } \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}).}$$

Soient $f, g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$. On note

$$f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \qquad g : t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n \qquad fg : t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^n$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_r = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\; r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right|\; r^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k\, b_{n-k}|\; r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\, |b_{n-k}|\; r^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_k|\; r^k \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_k|\; r^k \right) = \|f\|_r \cdot \|g\|_r
\end{aligned}$$

par produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

$$\boxed{\text{Pour toutes } f, g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}),\ \|fg\|_r \leqslant \|f\|_r \cdot \|g\|_r.}$$

5. Pour tout $t \in \mathrm{U}_r$,

$$\left|f_n(t)\right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; |t|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\; r^n = \|f\|_r \,,$$

ce qui montre que $\|f_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r} \leqslant \|f\|_r$. Par comparaison de séries positives,

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathrm{U}_r.}$$

On sait que la convergence normale implique la convergence ponctuelle, on note $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ la somme de la série, définie notamment sur U_r.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note

$$f_n : t \longmapsto a_{n,k}\, t^k \qquad \|f\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\; r^k.$$

La convergence de la série $\sum \|f_n\|_r$ montre que la famille $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$ de terme général $u_{n,k} := a_{n,k}\, r^k$ est sommable.

Fixons momentanément $t \in \mathrm{U}_r$, alors par comparaison la famille de terme général $a_{n,k}\, t^k$ est également sommable, ce qui fait que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\; r^k = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \right)}_{=: b_k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, t^k.$$

Ainsi, f est développable en série entière sur U_r :

$$\boxed{f \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}).}$$

Enfin, si l'on note $\mathrm{S}_p = \sum\limits_{k=0}^{p} f_k$,

$$f - \mathrm{S}_p : t \longmapsto \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} a_{n,k} \right) t^k$$

ce qui montre que, par sommabilité de la famille mise en jeu,

$$\begin{aligned} \|f - \mathrm{S}_p\|_r &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{n,k} \right| r^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{n,k}|\, r^k && \textit{inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{n=p+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}|\, r^k && \textit{Fubini} \\ &= \sum_{n=p+1}^{\infty} \|f_n\|_r \end{aligned}$$

et ce dernier terme tend vers 0 lorsque $p \to \infty$ en tant que reste d'une série convergente.

Ainsi,

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge vers } f \text{ au sens de la norme } \|\cdot\|_r.}$$

6.

6a. Posons $g = f/f(0)$, de sorte que $g(0) = 1$ et que $g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$. Si l'on trouve un réel $0 < r < \rho$ et une fonction $h \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R})$ telle que $h = 1/g$, alors la fonction $k = h/f(0)$ est bien dans $\mathscr{D}_r(\mathbf{R})$ et vérifie $fk = (f/f(0)) \cdot h = gh = 1$. La recherche de $1/f$ se ramène donc à celle de $1/g$.

$$\boxed{\text{On peut supposer sans perdre de généralité que } f(0) = 1.}$$

6b. Pour tout $t \in \mathrm{U}_r$, le produit de Cauchy des séries de sommes respectives $f(t)$ et $g(t)$ est (absolument convergent) et

$$1 = f(t)\, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k \right) t^n.$$

Ceci étant vrai sur un voisinage de 0, le théorème d'unicité du développement en série entière permet de conclure que

- pour $n = 0$, on a $a_0 b_0 = 1$, donc $b_0 = 1$,
- pour tout $n \geqslant 1$,
  $$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k = 0$$
  ou encore, en utilisant toujours $a_0 = 1$,
  $$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k\, a_{n-k}.$$

$$\boxed{b_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \geqslant 1,\ b_n = -(b_0\, a_n + b_1\, a_{n-1} + \cdots + b_{n-1}\, a_1).}$$

6c. Fixons un réel $0 < \mathrm{R} < \rho$. Alors la suite $(a_n \mathrm{R}^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée ; on note $\mathrm{M} = \sup |a_n|\, \mathrm{R}^n$, de telle sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n}.$$

On pose alors $\mathrm{K} = \max(1, \mathrm{M})$, de sorte que $\mathrm{M} \leqslant \mathrm{K}^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis $c = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R}}$, et on a immédiatement

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n| \leqslant c^n.}$$

6d. Il ne reste qu'à montrer la relation voulue par récurrence sur n :

- **Au rang $n = 0$,** on a $|b_0| = 1 \leqslant (2c)^0$.

- **Soit $n \geqslant 1$ et supposons $|b_k| \leqslant (2c)^k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.** Alors

$$\begin{aligned} |b_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|\,|a_{n-k}| && \textit{question 6c et I.T.} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (2c)^k\, c^{n-k} && \textit{hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant c^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = c^n \cdot \frac{2^n-1}{2-1} = (2^n-1)\, c^n \leqslant 2^n\, c^n, \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété au rang n.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbf{N} \qquad |b_n| \leqslant (2c)^n.}$$

6e. Posons maintenant $r := 1/c$. Puisque $(b_n\, r^n)$ est bornée, la série $\sum b_n\, t^n$ est de rayon au moins r. Notons g sa somme. Alors, pour tout $t \in \mathrm{U}_r$, et par produit de Cauchy de séries entières,

$$f(t)\, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right)}_{=\delta_{n,0}} t^n = 1.$$

Ainsi, en tant que fonction de $\mathscr{D}_r(\mathbf{R})$, on a bien montré que $g = 1/f$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } 0 < r < \rho \text{ tel que } 1/f \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}).}$$

7. On rappelle qu'un anneau est *intègre* s'il est commutatif (c'est le cas ici), non réduit à $\{0\}$ (c'est encore le cas) et s'il n'admet pas de diviseur de 0.

❑ **Soient $f, g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ telles que $f \cdot g = 0$.** Posons alors $t_k = 2^{-k}\rho$ pour tout $k \geqslant 1$; alors

$$\forall k \geqslant 1 \qquad f(t_k)\, g(t_k) = 0$$

c'est-à-dire que $f(t_k) = 0$ ou $g(t_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. Le principe des tiroirs montre qu'il existe une infinité d'indices tels que t_k est un zéro d'une même fonction. Quitte à échanger les rôles de f et g, on peut donc supposer qu'une sous-suite $(t_{\varphi(k)})_{k \geqslant 1}$ est constituée de zéros de la fonction f.

- De la relation $f(t_k) = 0$ pour tout k on en déduit, par continuité de f, que $a_0 = f(0) = 0$.
- On pose alors $f_1(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\, t^n$, de sorte que $f_1(t_k) = f(t_k)/t_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. En passant de nouveau à la limite, $a_1 = f_1(0) = 0$.
- On continue par récurrence. Supposons montré $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$, on définit $f_p(t) = f(t)/t^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{p+n}\, t^n$, alors $f_p(t_k) = f(t_k)/t_k^n = 0$ et, en passant à la limite, $a_p = f_p(0) = 0$.
- Ainsi, par récurrence, on a montré que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc f est la fonction nulle dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$.

On a ainsi montré que $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ n'admet pas de diviseur de zéro.

$$\boxed{\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R}) \text{ est un anneau intègre.}}$$

DEUXIÈME PARTIE

8.

8a. $\|\cdot\|_{r,s}$ est à valeurs positives, homogène par homogénéité de $\|\cdot\|_r$. Si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} f_k\,\mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} g_k\,\mathrm{X}^k$, alors

$$\|\mathrm{P}+\mathrm{Q}\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{n} \|f_k + g_k\|_r\; s^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_r\; s^k + \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_r\; s^k = \|\mathrm{P}\|_{r,s} + \|\mathrm{Q}\|_{r,s}\,.$$

Enfin, par positivité des termes, si $\|\mathrm{P}\|_{r,s} = 0$ alors pour $i = 0, \dots, n$, $\|f_i\|_r\; s^i = 0$ et donc $\|f_i\|_r = 0$, puis $\mathrm{P} = 0$.

$$\boxed{\|\cdot\|_{r,s} \text{ est une norme sur } \mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]\big).}$$

Remarquons entre autres que, si l'on note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1, $\|\mathbf{1}\|_r = 1$ et donc $\|\mathrm{X}^p\|_{r,s} = s^p$.

8b. Soient $\mathrm{P} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]\big)$ et $\mathrm{Q} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})\big(\mathbf{R}_m[\mathrm{X}]\big)$, alors par structure d'algèbre de $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$, les coefficients de PQ sont des fonctions développable en série entière sur U_ρ, donc éléments de $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$. Par ailleurs, PQ est évidemment de degré au plus $m+n$.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]\big) \text{ et } \mathrm{Q} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})\big(\mathbf{R}_m[\mathrm{X}]\big), \text{ alors } \mathrm{PQ} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})\big(\mathbf{R}_{m+n}[\mathrm{X}]\big).}$$

Enfin, par produit de Cauchy de sommes finies

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{PQ}\|_{r,s} &= \sum_{i=0}^{m+n} \left\| \sum_{k=0}^{i} f_{k_r} \cdot g_{i-k} \right\|_r s^i \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{m+n} \sum_{k=0}^{i} \|f_k\|_r \cdot \|g_{i-k}\|_r\; s^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_r\; s^i \cdot \sum_{j=0}^{n} \|g_j\|_r\; s^j = \|\mathrm{Q}\|_{r,s} \cdot \|\mathrm{Q}\|_{r,s}\,.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\|\mathrm{PQ}\|_{r,s} \leqslant \|\mathrm{P}\|_{r,s} \cdot \|\mathrm{Q}\|_{r,s}\,.}$$

9.

9a. L'existence et l'unicité, pour toute valeur de t, des polynômes cherchés, est une conséquence immédiate de la division euclidienne dans $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$.

Reste à vérifier que les coefficients sont bien tous éléments de $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$. Or, si applique l'algorithme de division selon les puissances décroissantes de A par B, on constate que, par unitarité de B, seules des additions et des multiplications sont nécessaires ; la structure d'anneau de $\mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ permet alors de conclure que $\mathrm{Q} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})\big(\mathbf{R}_{n-d}[\mathrm{X}]\big)$ et $\mathrm{R} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})\big(\mathbf{R}_{d-1}[\mathrm{X}]\big)$.

$$\boxed{\text{Il existe des éléments } \mathrm{Q} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_{n-d}[\mathrm{X}]\big) \text{ et } \mathrm{R} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathbf{R}_{d-1}[\mathrm{X}]\big) \text{ uniquement déterminés tels que } \mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R}.}$$

9b. Examinons d'abord le cas $\mathrm{B} = \mathrm{X}^d$. Notons $\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\mathrm{X}^k$, où $a_k \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$ pour $k = 0, \dots, n$.

La division euclidienne précédente s'écrit tout simplement

$$\mathrm{A} = \mathrm{X}^d\,\underbrace{\left(a_d + a_{d+1}\,\mathrm{X} + \cdots + a_n\,\mathrm{X}^{n-d}\right)}_{\mathrm{Q}} + \underbrace{a_0 + a_1\,\mathrm{X} + \cdots + a_{d-1}\,\mathrm{X}^{d-1}}_{\mathrm{R}}$$

et l'on a immédiatement

$$\|\mathrm{Q}\|_{r,s} = \sum_{k=d}^{n} \|a_k\|_r\; s^{k-d} = s^{-d} \sum_{k=d}^{n} \|a_k\|_r\; s^k \leqslant s^{-d} \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|_r\; s^k = \frac{\|\mathrm{A}\|_{r,s}}{s^d}$$

et

$$\|\mathrm{R}\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{d} \|a_k\|_r\; s^k \leqslant \|\mathrm{A}\|_{r,s}\,.$$

Ces deux inégalités sont bien celles de l'énoncé dans le cas $\mathrm{B} = \mathrm{X}^d$.

On remarque au passage que

$$\|\mathrm{A}_{r,s}\| = \left\|\mathrm{X}^d\mathrm{Q}\right\|_{r,s} + \|\mathrm{R}\|_{r,s} = s^d\;\|\mathrm{Q}\|_{r,s} + \|\mathrm{R}\|_{r,s}\,,$$

du fait que les polynômes $X^d Q$ et R n'ont pas de terme de degré commun.

Traitons maintenant le cas général. La division euclidienne $A = BQ + R$ permet d'écrire

$$A - (B - X^d)Q = X^d Q + R \tag{$*$}$$

et, comme on vient de le remarquer, cela permet d'écrire

$$\left\|A - (B - X^d)Q\right\|_{r,s} = \left\|X^d Q + R\right\|_{r,s} = s^d \, \|Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s}$$

donc

$$s^d \, \|Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} + \left\|B - X^d\right\|_{r,s} \|Q\|_{r,s}$$

ce qui, en réordonnant les termes, donne

$$\underbrace{\left(s^d - \left\|B - X^d\right\|_{r,s}\right)}_{>0} \|Q\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} - \|R\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} \,,$$

et donc

$$\boxed{\|Q\|_{r,s} \leqslant \frac{\|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}.}$$

Reprenons la relation $(*)$ sous la forme également

$$A - R - X^d Q = (B - X^d)Q.$$

Remarquons d'abord que

$$\left\|(B - X^d)Q - A\right\|_{r,s} = \left\|X^d Q + R\right\|_{r,s} = s^d \, \|Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s}$$

puis, par inégalité triangulaire inverse,

$$\begin{aligned}\left\|(B - X^d)Q\right\|_{r,s} &\geqslant \left\|(B - X^d)Q - A\right\|_{r,s} - \|A\|_{r,s} = s^d \, \|Q\|_{r,s} + \|R\|_{r,s} - \|A\|_{r,s} \\ &\geqslant \|R\|_{r,s} - \|A\|_{r,s} \,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|R\|_{r,s} &\leqslant \|A\|_{r,s} + \left\|(B - X^d)Q\right\|_{r,s} \\ &\leqslant \|A\|_{r,s} + \left\|B - X^d\right\|_{r,s} \cdot \|Q\|_{r,s} \\ &\leqslant \|A\|_{r,s} + \left\|B - X^d\right\|_{r,s} \cdot \frac{\|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}} \\ &= \|A\|_{r,s} \left[1 + \frac{\left\|B - X^d\right\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}\right] = \frac{s^d \, \|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}\end{aligned}$$

ce qui conclut la question :

$$\boxed{\|R\|_{r,s} \leqslant \frac{s^d \cdot \|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}.}$$

10. F étant unitaire de degré d et R de degré $\leqslant d - 1$,

$$\boxed{\text{F + R est unitaire de degré } d.}$$

Avec les hypothèses de l'énoncé, on a

$$P_{|t=0} = X^d + f_{d+1}(0)\, X^{d+1} + \cdots + f_n(0)\, X^n \qquad \text{et} \qquad F_{|t=0} = X^d,$$

ce qui fait que la division euclidienne de P par F s'écrit, en $t = 0$,

$$P_{|t=0} = \underbrace{X^d}_{F_{|t=0}} \underbrace{\left(1 + f_{d+1}(0)\, X + \cdots + f_n(0)\, X^{n-d}\right.}_{Q_{|t=0}} + \underbrace{0}_{R_{|t=0}}$$

et donc $(F + R)_{|t=0} = F_{|t=0} = X^d$.

$$\boxed{(F + R)_{|t=0} = X^d.}$$

11. On effectue la division euclidienne
$$\mathrm{P} = \mathrm{F}_0\,\mathrm{Q}_0 + \mathrm{R}_0. \tag{1}$$
Le polynôme F_0 étant unitaire de degré d, on a
$$\mathrm{F}_0 - \mathrm{X}^d = f_0 + f_1\,\mathrm{X} + \cdots + f_{d-1}\,\mathrm{X}^{d-1} \qquad \text{et} \qquad \left\|\mathrm{F}_0 - \mathrm{X}^d\right\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{d-1} \|f_k\|_r\; s^k$$
On note alors
$$\alpha_0 : (r,s) \longmapsto s^{-d}\cdot \left\|\mathrm{F}_0 - \mathrm{X}^d\right\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{d-1} \|f_k\|_r\; s^{k-d}$$
et on remarque que :

- ☑ $r \mapsto \alpha_0(r,s)$ est une fonction croissante,
- ☑ $s \mapsto \alpha_0(r,s)$ est une fonction décroissante, de limite nulle en $+\infty$.

Notons
$$\mathrm{Q}_0 = \sum_{k=0}^{n-d} q_k\,\mathrm{X}^k \qquad \mathrm{R}_0 = \sum_{k=0}^{d-1} r_k\,\mathrm{X}^k.$$
La relation (1), évaluée en $t=0$, s'écrit on l'a vu à la question **10** sous la forme
$$\mathrm{P}_{|t=0} = \mathrm{X}^d + f_{d+1}(0)\,\mathrm{X}^{d+1} + \cdots + f_n(0)\,\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^d\cdot \underbrace{\left[1 + q_1(0)\,\mathrm{X} + \cdots + q_{n-d}(0)\,\mathrm{X}^{n-d}\right]}_{=\mathrm{Q}_{0\,|t=0}} + \underbrace{r_0(0) + \cdots + r_{d-1}(0)\,\mathrm{X}^{d-1}}_{=\mathrm{R}_{0\,|t=0}=0}.$$
et on peut donc poser
$$\beta_0(r,s) = \|1 - \mathrm{Q}_1\|_{r,s} = \|q_0 - 1\|_r + \sum_{k=1}^{n-d} \|q_k\|_r\; s^k.$$
Remarquons tout de suite que $q_0 - 1$ est une fonction analytique, nulle en 0. Ainsi,

- ☑ $r \mapsto \beta_0(r,s)$ est une fonction croissante, prenant en 0 la valeur $b(s) = \sum_{k=1}^{n-d} \left|q_k(0)\right| s^k$.
- ☑ $r \mapsto \beta_0(r,s)$ est une fonction croissante.

Enfin,
$$\varepsilon_0 : (r,s) \longmapsto s^{-d}\cdot \|\mathrm{R}_0\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{d-1} \|r_k\|\; s^{k-d}$$
est telle que

- ☑ $r \mapsto \varepsilon_0(r,s)$ est une fonction croissante,
- ☑ $s \mapsto \varepsilon_0(r,s)$ est une fonction décroissante, de limite nulle en $+\infty$.

Enfin, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}_\rho(\mathbf{R})$, on remarque que $t \mapsto \|\varphi\|_r$ est une fonction croissante.

Tous les ingrédients sont maintenant prêts.

- Parmi toutes les quantités d'intérêt, une seule ne dépend que d'une seule des deux variables r et s, nommément $\|q_0 - 1\|_r$. Puisque $q_0 - 1$ s'annule en 0 et est continue, fixons un réel R tel que $\|q_0 - 1\|_{\mathrm{R}} \leqslant \frac{1}{24}$.
- On fixe alors s suffisamment grand pour avoir les trois conditions
$$\alpha_0(\mathrm{R},s) \leqslant \frac{1}{6} \qquad \varepsilon_0(\mathrm{R},s) \leqslant \frac{1}{12} \qquad b(s) = \sum_{k=1}^{n-d} \left|q_k(0)\right| s^k < \frac{1}{24}.$$
- La fonction $r \mapsto \beta_0(r,s)$ est continue et croissante, et $\beta_0(0,s) = b(s) < 1/24$, on choisit alors $0 < r \leqslant \mathrm{R}$ suffisamment petit pour que $\beta(r,s) \leqslant 1/12$.
- Par croissance des différentes fonctions par rapport à r, on a donc
$$\alpha_0(r,s) \leqslant \frac{1}{6} \qquad \beta_0(r,s) \leqslant \frac{1}{12} \qquad \varepsilon_0(r,s) \leqslant \frac{1}{12}$$
et notamment
$$\alpha_0(r,s) + 2\varepsilon_0(r,s) \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta_0(r,s) + \varepsilon_0(r,s) \leqslant \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\text{On peut choisir } r \text{ et } s \text{ de sorte que } \alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \tfrac{1}{3} \text{ et } \beta_0 + \varepsilon_0 \leqslant \tfrac{1}{3}.}$$

12. On écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{F}_i\,\mathrm{Q}_i + \mathrm{R}_i = (\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{R}_i)\,\mathrm{Q}_i + \mathrm{R}_i \\ &= \mathrm{F}_{i+1}\,\mathrm{Q}_i + (\mathrm{Q}_i - 1)\,\mathrm{R}_i && \textit{d'une part} \\ \mathrm{P} &= \mathrm{F}_{i+1}\,\mathrm{Q}_{i+1} + \mathrm{R}_{i+1} \end{aligned}$$

donc, par différence,

$$\boxed{(1 - \mathrm{Q}_i)\cdot \mathrm{R}_i = (\mathrm{Q}_{i+1} - \mathrm{Q}_i)\cdot \mathrm{F}_{i+1} + \mathrm{R}_{i+1}.}$$

13. De la relation $\mathrm{F}_{i+1} = \mathrm{F}_i + \mathrm{R}_i$ on tire

$$\alpha_{i+1} = s^{-d}\left\|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}^d\right\|_{r,s} = s^{-d}\left\|\mathrm{F}_i + \mathrm{R}_i - \mathrm{X}^d\right\|_{r,s} \leqslant s^{-d}\left\|\mathrm{F}_i + -\mathrm{X}^d\right\|_{r,s} + s^{-d}\left\|\mathrm{R}_i\right\|_{r,s} = \alpha_i + \varepsilon_i.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \mathbf{N},\ \alpha_{i+1} \leqslant \alpha_i + \varepsilon_i.}$$

Supposons désormais $\alpha_{i+1} < 1$. On reprend l'égalité de la question **12**, que l'on interprète comme la division euclidienne de la question **9** :

$$\underbrace{(1 - \mathrm{Q}_i)\cdot \mathrm{R}_i}_{\mathrm{A}} = \underbrace{(\mathrm{Q}_{i+1} - \mathrm{Q}_i)}_{\mathrm{Q}}\cdot \underbrace{\mathrm{F}_{i+1}}_{\mathrm{B}} + \underbrace{\mathrm{R}_{i+1}}_{\mathrm{R}}.$$

puisque $\deg \mathrm{R}_{i+1} < \deg \mathrm{F}_{i+1}$ par construction. On peut alors utiliser le résultat de la question **9b** puisque $\|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}\|_{r,s} = \alpha_{i+1} < 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Q}_{i+1} - \mathrm{Q}_i\|_{r,s} &\leqslant \frac{\left\|(1 - \mathrm{Q}_i)\,\mathrm{R}_i\right\|_{r,s}}{s^d - \|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}^d\|_{r,s}} \\ &\leqslant \frac{\left\|(1 - \mathrm{Q}_i)\right\|_{r,s}\,\|\mathrm{R}_i\|_{r,s}}{s^d - \|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}^d\|_{r,s}} && \textit{sous-multiplicativité de } \|\cdot\|_{r,s} \textit{ (question 8b)} \\ &= \frac{s^{-d}\left\|(1 - \mathrm{Q}_i)\right\|_{r,s}\,\|\mathrm{R}_i\|_{r,s}}{1 - s^{-d}\,\|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}^d\|_{r,s}} = \frac{\beta_i\,\varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}. \end{aligned}$$

Or, par inégalité triangulaire inverse,

$$\beta_{i+1} - \beta_i = \|1 - \mathrm{Q}_{i+1}\|_{r,s} - \|1 - \mathrm{Q}_i\|_{r,s} \leqslant \left\|1 - \mathrm{Q}_i - (1 - \mathrm{X}_{i+1})\right\|_{r,s} = \|\mathrm{Q}_{i+1} - \mathrm{Q}_i\|_{r,s}\,,$$

donc

$$\boxed{\beta_{i+1} \leqslant \beta_i + \frac{\beta_i\,\varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}.}$$

De la même façon,

$$\varepsilon_{i+1} = s^{-d}\,\|\mathrm{R}_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\left\|(1 - \mathrm{Q}_i)\,\mathrm{R}_i\right\|_{r,s}}{s^d - \|\mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{X}^d\|_{r,s}} \leqslant \frac{\beta_i\,\varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}.$$

$$\boxed{\varepsilon_{i+1} = s^{-d}\,\|\mathrm{R}_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\beta_i\,\varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}.}$$

14. Montrons les inégalités par récurrence sur $i \in \mathbf{N}$, le cas $i = 0$ étant évident.
Supposons les inégalités vraies au rang $i \geqslant 0$.

- D'une part,

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &\leqslant \alpha_i + \varepsilon_i \leqslant \alpha_0 + 2\cdot\left(1 - 2^{-i}\right)\cdot\varepsilon_0 + 2^{-i}\cdot\varepsilon_0 \\ &= \alpha_0 + 2\cdot\left[1 - (2^{-i} - 2^{-i-1})\right]\cdot\varepsilon_0 \\ &\leqslant \alpha_0 + 2\cdot\left(1 - 2^{-(i+1)}\right)\cdot\varepsilon_0. \end{aligned}$$

- Il vient en particulier
$$\alpha_{i+1} \leqslant \alpha_0 + 2\cdot\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3} < 1 \qquad \textit{d'après } \mathbf{11}$$
et donc $1-\alpha_{i+1} \geqslant \frac{2}{3}$. Ainsi $\alpha_{i+1} < 1$ et $\dfrac{1}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \dfrac{3}{2}$.
- On peut enfin appliquer la question **13** puisque $\alpha_{i+1} < 1$, ce qui mène à $\beta_{i+1} \leqslant \beta_i + \dfrac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}}$ et $\varepsilon_{i+1} \leqslant \dfrac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}}$. De plus, par hypothèse de récurrence,
$$\beta_i \leqslant \beta_0 + \left(1-2^{-i}\right)\cdot\varepsilon_0 \leqslant \beta_0+\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3} \qquad \textit{d'après } \mathbf{11}$$
donc
$$\frac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \frac{1}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{\varepsilon_i}{2}.$$
puis
$$\varepsilon_{i+1} \leqslant \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i}{2} \leqslant 2^{-(i+1)}\,\varepsilon_0.$$
Enfin,
$$\beta_{i+1} \leqslant \beta_i + \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \beta_i + \frac{\varepsilon_i}{2} \leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\cdot\varepsilon_0 + 2^{-(i+1)}\,\varepsilon_0 \leqslant \beta_0 + \left(1-2^{-(i+1)}\right)\cdot\varepsilon_0,$$
ce qui achève la preuve.

15a. La série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \|F_{i+1}-F_i\|_{r,s}$ converge puisque $\|F_{i+1}-F_i\|_{r,s} = \|R_i\|_{r,s} = s^{-d}\varepsilon_i \leqslant \dfrac{s^{-d}}{2^i}$.
Commençons par un lemme théorique :

LEMME 1 *Soit* $(H_i)_{i\geqslant 0}$ *une suite de polynômes à valeurs dans* $\mathscr{D}_r(\mathbf{R}_{d'}[X])$. *Cette suite converge coefficient par coefficient (pour la norme* $\|\cdot\|$*) vers* $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{d'} \widetilde{\ell}_k\, X^k$ *si et seulement si la suite* $(H_i)_{i\geqslant 0}$ *converge vers* L *pour* $\|\cdot\|_{r,s}$.

Démonstration : Notons génériquement $P = \sum_{k=0}^{d'} f_k X^k$. Les normes définies sur $\mathbf{R}^{d'+1}$ par
$$N_s(x) = \sum_{k=0}^{d'} |x_k|\; s^k \qquad \text{et} \qquad N_\infty(x) = \max_{0\leqslant k\leqslant d'} |x_k|$$
sont équivalentes, donc
$$P \longmapsto \|P\|_{r,+\infty} := N_\infty\big(\|f_0\|_r\,,\ldots,\|f_{d'}\|_r\big) \qquad \text{et} \qquad P \longmapsto \|P\|_{r,s} = N_s\big(\|f_0\|_r\,,\ldots,\|f_{d'}\|_r\big)$$
sont équivalentes sur $\mathscr{D}_r\big(\mathbf{R}_{d'}[X]\big)$. La première norme est bien celle correspondant à la convergence coefficient par coefficient pour la norme $\|\cdot\|_r$. ∎

Puisque la série $\sum \|F_{i+1}-F_i\|_{r,s}$ converge, on en déduit, en notant $F_i = \sum_{k=0}^{d} (f_i)_k\, X^k$, que les séries $\sum \|f_{i+1,k}-f_{i,k}\|_r$ convergent. La question **5** permet d'en déduire que les séries $\sum \|f_{i+1,k}-f_{i,k}\|_\infty$ convergent et que leurs sommes φ_k sont éléments de $\mathscr{D}_r(\mathbf{R})$; de plus on a la convergence pour les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_r$
$$f_{i,k} \xrightarrow[i\to\infty]{\|\cdot\|_\infty \text{ et } \|\cdot\|_r} \varphi_k \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}).$$
D'après notre lemme, on a donc
$$F_i \xrightarrow[i\to\infty]{\|\cdot\|_{r,s}} X^d + \sum_{k=0}^{d-1} \varphi_k\, X^k =: F \in \mathscr{D}_r\big(\mathbf{R}_d[X]\big).$$

$$\boxed{\text{La suite } (F_i)_{i\geqslant 0} \text{ converge pour la norme } \|\cdot\|_{r,s} \text{ vers un polynôme unitaire } F \in \mathscr{D}_r\big(\mathbf{R}_n[X]\big) \text{ de degré } d.}$$

Enfin, puisque pour $k=0,\ldots,d-1$ on sait que $f_{i,k}(0)=0$ et que la convergence normale implique la convergence simple, on en déduit que
$$\forall k \in [\![0,d-1]\!] \qquad \varphi_k(0) = \lim_{i\to\infty} f_{i,k}(0) = 0$$
ce qui montre que

$$\boxed{\mathrm{F}_{|t=0} = \mathrm{X}^d.}$$

15b. On sait que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathrm{P} = \mathrm{F}_i\,\mathrm{Q}_i + \mathrm{R}_i$$

et de plus, la question **14** montre que $\|\mathrm{R}_i\|_{r,s} = s^d \cdot \varepsilon_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ (en particulier, d'après notre lemme, tous les coefficients de $\mathrm{R}_i \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}_{d-1}[\mathrm{X}])$ convergent vers 0).

Les coefficients de Q_i sont obtenus à partir de ceux de P et de F_i par division euclidienne, en une expression polynômiale (puisque F_i est unitaire), donc puisque les coefficients de F_i convergent pour $\|\cdot\|_r$, ceux de Q_i (de proche en proche par degré décroissant) convergent également.

Par le lemme, puisque $\mathrm{Q}_i \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}_{n-d}[\mathrm{X}])$ (degré majoré par $n-d$), la suite $(\mathrm{Q}_i)_{i\geqslant 0}$ converge pour $\|\cdot\|_{r,s}$ vers un polynôme $\mathrm{G} \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R}_{d-1}[\mathrm{X}])$.

Enfin, on peut passer à la limite dans $\mathrm{P} = \mathrm{F}_i\mathrm{Q}_i + \mathrm{R}_i$, puisque la somme et l'application bilinéaire produit sont continues (question**8b**) ce qui mène à $\mathrm{P} = \mathrm{FG}$.

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{G} \in \mathscr{D}_r\big(\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]\big) \text{ telle que } \mathrm{P} = \mathrm{FG}.}$$

16. En se plaçant dans les hypothèses du théorème **1**, on pose $\widetilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P}(\mathrm{X}-\lambda)$; alors $\widetilde{\mathrm{P}}$ vérifie toutes les hypothèses de la question **10**.

Il existe donc $\widetilde{\mathrm{F}}$ et $\widetilde{\mathrm{G}}$ tels que $\widetilde{\mathrm{P}} = \widetilde{\mathrm{F}} \cdot \widetilde{\mathrm{G}}$. Puis $\mathrm{F} = \widetilde{\mathrm{F}}(\mathrm{X}+\lambda)$ et $\mathrm{G} = \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{X}+\lambda)$ conviennent.

$$\boxed{\text{Le théorème } \mathbf{1} \text{ est démontré.}}$$

17. Posons $\delta = \sqrt{f(0)} > 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - f$, de sorte que $\mathrm{P}_{\,;\,t=0} = \mathrm{X}^2 - f(0) = (\mathrm{X}-\delta)(\mathrm{X}+\delta)$. Le réel δ est racine de multiplicité 1 pour P.

On utilise le théorème **1** : il existe un réel r tel que $0 < r \leqslant \rho$, F unitaire de degré 1, et G, nécessairement unitaire puisque P et F le sont tel que $\mathrm{P} = \mathrm{FG}$.

Si l'on note $\mathrm{F} = \mathrm{X} - g$ et $\mathrm{G} = \mathrm{X} - h$, où $g, h \in \mathscr{D}_r(\mathbf{R})$, la relation

$$\mathrm{X}^2 - f = (\mathrm{X}-g)(\mathrm{X}-h) = \mathrm{X}^2 - (g+h)\mathrm{X} + gh$$

montre que $f = -gh$, puis $f = g^2$, ce qui achève la preuve.

Enfin, par continuité de f, on peut choisir $0 < \rho_f < r$ tel que $f > 0$ sur U_{ρ_f}.

$$\boxed{\text{Il existe } \rho_f \in \mathbf{R}_+^* \text{ tel que } \rho_f < \rho \text{ et tel que } f > 0 \text{ sur } \mathrm{U}_{\rho_f} \text{ et } \sqrt{f} \in \mathscr{D}_{\rho_f}(\mathbf{R}).}$$

TROISIÈME PARTIE

18. La matrice $\mathrm{M}_{|t=0}$ est symétrique réelle donc, par le théorème spectral,

$$\boxed{\mathrm{M}_{|t=0} \text{ admet une valeur propre réelle.}}$$

19. Le polynôme caractéristique de $\mathrm{M}_{|t=0}$ est $\chi_{|t=0} = (\mathrm{X}-\lambda)^n$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_{|t=0}) = \{\lambda\}$ et, puisque $\mathrm{M}_{|t=0}$ est diagonalisable, $\mathrm{M}_{|t=0} = \lambda \mathrm{I}_n$.

De plus $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big)$ et $\lim\limits_{t\to 0}\big(\mathrm{M}(t) - \lambda\mathrm{I}_n\big) = \mathrm{M}_{|t=0} - \lambda\mathrm{I}_n = 0$.

Les coefficients de $\mathrm{M}(t) - \lambda\mathrm{I}_n$ appartiennent à $\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathbf{R})$ et s'annulent en 0 ; étant des fonctions développables en séries entères sur U_{ρ_1}, ils se factorisent par t.

Ainsi, il existe $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$ telle que $\mathrm{M}(t) = \lambda\mathrm{I}_n + t\mathrm{M}_0(t)$ pour $t \in \mathrm{U}_{\rho_1}$.

Comme pour $t \in \mathrm{U}_{\rho_1} \setminus \{0\}$,

$$\mathrm{M}_0(t) = \frac{1}{t}\big(\mathrm{M}(t) - \lambda\mathrm{I}_n\big) \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R}),$$

on a $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{M}_0(t) \in \mathrm{S}_n(\mathbf{R})$, et finalement $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big)$.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice symétrique } \mathrm{M}_0 \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big) \text{ telle que } \mathrm{M} = \lambda\mathrm{I}_n + t\mathrm{M}_0 \text{ pour tout } t \in \mathrm{U}_{\rho_1}.}$$

20. De $\chi_{|t=0} = \chi_{\mathrm{M}_{|t=0}} = \mathrm{F}_{|t=0} \cdot \mathrm{G}_{|t=0}$ et avec le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi(\mathrm{M})_{|t=0} = \chi_{\mathrm{M}_{|t=0}}(\mathrm{M}_{|t=0}) = 0 = \mathrm{F}_{|t=0}(\mathrm{M}_{|t=0}) \cdot \mathrm{G}_{|t=0}(\mathrm{M}_{|t=0}) = \mathrm{A}_0\,\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_0\,\mathrm{A}_0.$$

Avec la valeur $\mathrm{F}_{|t=0} = (\mathrm{X}-\lambda)^d$, on a

$$\chi_{|t=0} = (\mathrm{X}-\lambda)^d \cdot \mathrm{G}_{|t=0} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{X}-\lambda)^d \wedge \mathrm{G}_{|t=0} = 1.$$

Le lemme de décomposition des noyaux montre alors que

$$\mathbf{R}^n = \ker\left[\mathrm{F}_{|t=0}(\mathrm{M}_{|t=0})\right] \oplus \ker\left[\mathrm{G}_{|t=0}(\mathrm{M}_{|t=0})\right] = \ker(\mathrm{A}_0) \oplus \ker(\mathrm{B}_0)$$

et, par définition, $\ker(\mathrm{A}_0) = \ker\left[(\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{I}_n)^d\right]$.

- De la relation $\mathrm{A}_0\,\mathrm{B}_0 = 0$, on en déduit que $\operatorname{im} \mathrm{B}_0 \subset \ker \mathrm{A}_0$; la formule du rang et la somme directe précédente permettent de conclure que $\dim \operatorname{im} \mathrm{B}_0 = \dim \ker(\mathrm{A}_0$, et donc $\operatorname{im} \mathrm{B}_0 = \ker \mathrm{A}_0$.
- Par le même raisonnement, $\operatorname{im} \mathrm{A}_0 = \ker \mathrm{B}_0$. Donc $\mathbf{R}^n = \operatorname{im} \mathrm{A}_0 \oplus \operatorname{im} \mathrm{B}_0$.

Par ailleurs, $\operatorname{rg} \mathrm{B}_0 = \dim \ker \mathrm{A}_0 = \dim \ker\left[(\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{I}_n)^d\right] = d$ (sous-espace caractéristique) et donc $\operatorname{rg} \mathrm{A}_0 = n-d$.

- Dans la matrice B_0, on choisit $\operatorname{rg}(\mathrm{B}_0)$ colonnes qui forment une base de $\operatorname{im}(\mathrm{B}_0)$, d'où l'existence de $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbf{R})$ (constituée de 0 et de 1) telle que $\operatorname{im}(\mathrm{B}_0) = \operatorname{im}(\mathrm{B}_0\mathrm{U})$.
- Dans la matrice A_0, on choisit $\operatorname{rg}(\mathrm{A}_0)$ colonnes qui forment une base de $\operatorname{im}(\mathrm{A}_0)$, d'où l'existence de $\mathrm{V} \in \mathcal{M}_{n,n-d}(\mathbf{R})$ (constituée de 0 et de 1) telle que $\operatorname{im}(\mathrm{A}_0) = \operatorname{im}(\mathrm{A}_0\mathrm{V})$.

Puisque $\mathbf{R}^n = \operatorname{im}(\mathrm{A}_0) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{B}_0)$, la matrice constituée des colonnes de $\mathrm{B}_0\mathrm{U}$ et $\mathrm{A}_0\mathrm{V}$, $\mathrm{Q}_{|t=0} = (\mathrm{B}_0\mathrm{U}|\mathrm{A}_0\mathrm{V})$ est une matrice inversible (ses colonnes formant une base de $\mathbf{R}^n$).

L'existence des deux matrices $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,d}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{V} \in \mathscr{M}_{n,n-d}(\mathbf{R})$ telles que :

- $\operatorname{im}(\mathrm{B}_0\mathrm{U}) = \operatorname{im}(\mathrm{B}_0)$,
- $\operatorname{im}(\mathrm{A}_0\mathrm{V}) = \operatorname{im}(\mathrm{A}_0)$ et
- $(\mathrm{B}_0\mathrm{U} \mid \mathrm{A}_0\mathrm{V})$ est inversible,

est prouvée.

21. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ étant un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, il existe $\rho_2' \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\rho_2' \leqslant \rho_1$ et pour $t \in \mathrm{U}_{\rho_2}$, $\mathrm{Q}(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et

$$\left[\mathrm{Q}(t)\right]^{-1} = \frac{1}{\operatorname{dét} \mathrm{Q}(t)}\left[\operatorname{Com} \mathrm{Q}(t)\right]^{\mathrm{T}}$$

D'après 6, il existe $\rho_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\rho_2 \leqslant \rho_2' \leqslant \rho_1$ tel que $\dfrac{1}{\operatorname{dét}(\mathrm{Q})} \in \mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbf{R})$ et donc

$$\mathrm{Q}^{-1} = \frac{1}{\operatorname{dét} \mathrm{Q}}\left[\operatorname{com} \mathrm{Q}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathscr{D}_{\rho_2}\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$$

grâce à la question 2. On en déduit notamment que $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n\big(\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbf{R})\big)$.

$$\boxed{\text{Il existe } \rho_2 \in \mathbf{R}_+^*,\ \rho_2 \leqslant \rho_1, \text{ tel que } \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n\big(\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbf{R})\big).}$$

22.

22a. $\mathrm{Q}_{|t=a} = (\mathrm{B}_a\mathrm{U}|\mathrm{A}_a\mathrm{V})$ inversible, donc $\mathbf{R}^n$ est somme directe des droites engendrées par chacune des colonnes, et en particulier

$$\boxed{\mathbf{R}^n = \operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V}).}$$

22b. On reprend certains arguments de la question 20.
Comme à la question 20, $\mathrm{A}_a\mathrm{B}_a = \mathrm{B}_a\mathrm{A}_a = 0$ (Cayley-Hamilton), donc

$$\operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) \subset \operatorname{im}(\mathrm{B}_a) \subset \ker(\mathrm{A}_a) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V}) \subset \operatorname{im}(\mathrm{A}_a) \subset \ker(\mathrm{B}_a).$$

Avec $\mathbf{R}^n = \operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V})$, $\operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) \subset \ker(\mathrm{A}_a)$ et $\operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V}) \subset \operatorname{im}(\mathrm{A}_a)$ et $\dim(\ker(\mathrm{A}_a)) + \dim(\operatorname{im}(\mathrm{A}_a)) = n$ (théorème du rang), on en déduit

$$\operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) = \ker(\mathrm{A}_a) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V}) = \operatorname{im}(\mathrm{A}_a)$$

et avec les inclusions précédentes,

$$\boxed{\operatorname{im}(\mathrm{B}_a\mathrm{U}) = \operatorname{im}(\mathrm{B}_a) = \ker(\mathrm{A}_a) \text{ et } \operatorname{im}(\mathrm{A}_a\mathrm{V}) = \operatorname{im}(\mathrm{A}_a) = \ker(\mathrm{B}_a).}$$

23. Les sous-espaces vectoriels $\ker(A_a)$ et $\ker(B_a)$ sont stables par M car A_a et B_a sont des polynômes en M donc commutent avec M.

La matrice $(Q^{-1}\cdot M\cdot Q)_{|t=a}$ est la matrice représentant l'endomorphisme $X \mapsto MX$ dans une base adaptée à la décomposition $\mathbf{R}^n = \ker(A_a)\oplus\ker(B_a) = \mathrm{im}(B_a U)\oplus\mathrm{im}(A_a V)$, donc est diagonale par blocs ; on la note $\mathrm{diag}(M_{1|t=a}, M_{2|t=a})$.

Enfin, d'après la question 2, $Q^{-1}\cdot M\cdot Q \in \mathscr{D}_{\rho_2}\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$ donc $M_1 \in \mathscr{D}_{\rho_2}\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big)$ et $M_2 \in \mathscr{D}_{\rho_2}\big(\mathscr{M}_{n-d}(\mathbf{R})\big)$.

$$\boxed{Q^{-1}\cdot M\cdot Q = \mathrm{diag}(M_1, M_2) \text{ avec } M_1 \in \mathscr{D}_{\rho_2}\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big),\ M_2 \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathscr{M}_{n-d}(\mathbf{R})\big).}$$

24. On sait que $(\mathrm{im}\, B_a)^\perp = \ker {B_a}^{\mathrm{T}} = \ker B_a$ car B_a est symétrique réelle. Ainsi,

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathrm{im}(B_a)}_{=\mathrm{im}(B_a U)} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\ker(B_a)}_{=\mathrm{im}(A_a V)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in U_{\rho_2},\ \mathbf{R}^n = \mathrm{im}(B_a U) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}(A_a V).}$$

25. $Q^{-1}\cdot M\cdot Q = \mathrm{diag}(M_1, M_2)$.

Écrivons la matrice Q sous la forme $(Q_1|Q_2)$ avec $Q_1 \in \mathscr{M}_{n,d}(\mathbf{R})$ et $Q_2 \in \mathscr{M}_{n,n-d}(\mathbf{R})$.

Grâce au *procédé d'orthonormalisation de Schmidt*, pour tout $a \in U_{\rho_2}$, il existe une matrice $(R_1)_a \in \mathscr{M}_d(\mathbf{R})$ (elle est triangulaire supérieure) telle que $Q_{1|t=a}\cdot(R_1)_a$ soit constituée d'une famille orthonormale de colonnes. Les coefficients de $(R_1)_a$ proviennent d'une expression des coefficients de Q utilisant :

- des produits et sommes (dans les produits scalaires),
- des racines carrées (dans les étapes de normalisation),
- et des quotients (toujours dans la normalisation)

appliqués en $t = a$; en invoquant les questions 1, 2, 6 et 17 un nombre fini de fois, on en déduit l'existence de $\rho_3' \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\rho_3' \leqslant \rho_2$ et $Q_1\cdot R_1 \in \mathscr{D}_{\rho_3'}\big(\mathscr{M}_{n,d}(\mathbf{R})\big)$.

De même, il existe $\rho_3 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\rho_3 \leqslant \rho_3'$ et pour $t \in U_{\rho_3'}$, $Q_2\cdot R_2 \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathscr{M}_{n,n-d}(\mathbf{R}))$ et pour tout $t \in U_{\rho_3}$, $Q_{|t=a}\cdot(R_2)_a$ est constituée d'une famille orthonormale de colonnes.

Comme $\mathbf{R}^n = \mathrm{im}(B_a U) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}(A_a V)$, les colonnes de $Q\cdot\mathrm{diag}(R_1, R_2) = (Q_1R_1|Q_2R_2)$ forment en tout $t = a \in U_{\rho_3}$ une base orthonormale, donc $Q\cdot\mathrm{diag}(R_1, R_2) \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ est orthogonale (au sens de la définition au début de la troisième partie).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe } \rho_R \in \mathbf{R}_+^* \text{ tel que } \rho_3 \leqslant \rho_2 \text{ et des matrices } R_1 \in \mathrm{GL}_d\big(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbf{R})\big),\ R_2 \in \mathrm{GL}_{n-d}\big(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbf{R})\big)\\ \text{telles que la matrice } Q\cdot\mathrm{diag}(R_1, R_2) \text{ soit orthogonale.}\end{array}}$$

26. Belle question.

On montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \left\{\begin{array}{l}\text{« Pour } \textit{toute} \text{ matrice } M \in \mathscr{D}_\rho\big(S_n(\mathbf{R})\big), \text{ il existe } r \in \mathbf{R}_+^* \text{ tel que } r \leqslant \rho\\ \text{et une matrice orthogonale } P \in \mathscr{D}_r\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\big) \text{ telle que } P^{\mathrm{T}}\cdot M\cdot P \text{ est}\\ \text{diagonale. »}\end{array}\right.$$

- **Le cas $n = 1$** est évident.
- **Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$.** Soit $M \in \mathscr{D}_\rho\big(S_n(\mathbf{R})\big)$.

— *1^er^ cas :* supposons que $M_{|t=0}$ possède au moins deux valeurs propres distinctes.

La question précédente nous permet de construire $\rho_3 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\rho_3 \leqslant \rho_1$, $P_1 \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ orthogonale telle que

$$P_1^{\mathrm{T}}\cdot Q\cdot P_1 = \mathrm{diag}(R_1^{\mathrm{T}}M_1R_1, R_2^{\mathrm{T}}M_2R_2) = \mathrm{diag}(\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}) \in \mathscr{D}_{\rho_3}\big(S_n(\mathbf{R})\big)$$

en posant $P_1 = Q\cdot\mathrm{diag}(R_1, R_2)$.

Puisque $d, n-d \in [\![1, n-1]\!]$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence sur $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{M_2}$ qui sont respectivement dans $\mathscr{D}_{\rho_3}\big(S_d(\mathbf{R})\big)$ et $\mathscr{D}_{\rho_3}\big(S_{n-d}(\mathbf{R})\big)$.

D'où l'existence d'un $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $r \leqslant \rho_3$, $P_2 = \mathrm{diag}(S_1, S_2) \in \mathscr{D}_r(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ orthogonale (car S_i orthogonales) tel que

$$(P_1P_2)^{\mathrm{T}}\cdot Q\cdot(P_1P_2) = \mathrm{diag}\left(S_1^{\mathrm{T}}\cdot\widetilde{M_1}\cdot S_1,\ S_2^{\mathrm{T}}\cdot\widetilde{M_2}\cdot S_2\right)$$

soit diagonale — et $\mathscr{P}(n)$ est démontré.

— *2e cas :* $\mathrm{M}_{|t=0}$ n'a qu'une seule valeur propre λ.

D'après la question **19**, il existe $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{D}_{\rho_1}\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big)$ tel que $\mathrm{M}(t) = \lambda \mathrm{I}_n + t\mathrm{M}_0(t)$ pour tout $t \in \mathrm{U}_\rho$.

- Si $\mathrm{M}_{0|t=0}$ possède plusieurs valeurs propres, d'après ce qui précède, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $r \leqslant \rho$, $\mathrm{P} \in \mathscr{D}_r(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ orthogonale tel que $\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{P}$ soit diagonale et donc

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{P} = \lambda \mathrm{I}_n + t\,(\mathrm{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{M}_0 \cdot \mathrm{P})$$

(avec le même abus de notation que l'énoncé) est encore diagonale et $\mathscr{P}(n)$ est prouvée.

- Dans le cas contraire, on réitère le résultat de la question **19** pour avoir $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n + t\lambda_0 \mathrm{I}_n + t^2 \mathrm{M}_1$ avec $\mathrm{M}_1 \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big)$ jusqu'à trouver une matrice M_i possédant plusieurs valeurs propres et on conclut comme précédemment en réduisant le rayon.
- Il reste donc le cas où, quelle que soit l'étape, la matrice M_i n'a qu'une seule valeur propre λ_i. Montrons alors qu'au voisinage de 0, $\mathrm{M} = \left(\lambda + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_{k-1}\, t^k\right) \mathrm{I}_n$, ce qui montrera que M est directement diagonale (et il suffit de choisir $\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$).

  Nous savons que pour $p \geqslant 1$,

$$\mathrm{M} = \left(\lambda + \sum_{k=1}^{p} \lambda_{k-1}\, t^k\right) \mathrm{I}_n + t^p\, \mathrm{M}_{p-1}$$

  et en particulier pour tout $k \geqslant 0$,

$$\frac{1}{k!}\, \mathrm{M}^{(k)}(0) = \lambda_{k-1}\, \mathrm{I}_n$$

  (en convenant que $\lambda_{-1} = \lambda$) puisque $\mathrm{M}_{p-1} \in \mathscr{D}_\rho\big(\mathrm{S}_n(\mathbf{R})\big)$.

  Or on sait que

$$\forall t \in \mathrm{U}_\rho \qquad \mathrm{M}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \mathrm{M}^{(k)}(0)\, t^k,$$

  donc on a bien montré que

$$\mathrm{M} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k-1}\, t^k\right) \mathrm{I}_n$$

  ce qui achève de prouver $\mathscr{P}(n)$.

Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n)$ est démontrée.

Le principe de récurrence permet de conclure que $\boldsymbol{\mathscr{P}(n)}$ est vraie pour tout $\boldsymbol{n \geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Le théorème } \mathbf{2} \text{ est démontré.}}$

Corrigé pour l'UPS par Walter Appel et Marc Rezzouk.

Si vous repérez des coquilles ou erreurs, merci de me les signaler à `walter.appel@laposte.net`