

Composition de mathématiques, B, (X), filière MP,
année 2014-2015.

Proposition de corrigé.

Ait Lhousain Mohamed, centre Salmane El Farissi, Salé, Maroc.

12 mai 2015

Première partie

1a. Soit $y \in]0, +\infty[$. L'application $u_y : t \mapsto t^{y-1}e^{-t}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, on a $u_y(t) \sim t^{y-1}$ et $1 - y < 1$, donc l'intégrale $\int_0^t u_y(t)dt$ est convergente par comparaison avec une intégrale convergente de Riemann. Au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 u_y(t) = t^{y+1}e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\int_1^{+\infty} u_y(t)dt$ est convergente par critère de comparaison avec l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ convergente de Riemann. Il en découle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} u_y(t)dt$ est convergente et que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
On a, par integration par parties :

$$\Gamma(y + 1) = \int_0^{+\infty} t^y e^{-t} dt = [-t^y e^{-t}]_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt$$

Integration par parties validée par le fait que $t \mapsto t^y e^{-t}$ admet des limites finies (nulles) aux bornes de l'intégrale. Donc $\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y)$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tel que $u_n = \Gamma(n + 1)$ satisfait $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n + 1)u_n \end{cases}$ donc elle coincide avec $(n!)_{n \geq 0}$, donc $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.b On a $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt = \frac{1}{y} \Gamma(y + 1) = \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^y dt$. Donc :

$$\Gamma(y) = y^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^y dt \tag{1}$$

On a $\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds = \int_{-1}^{+\infty} e^{-ys+y\ln(1+s)} ds = \int_{-1}^{+\infty} e^{-ys} (1 + s)^y ds$
Par le changement de variable $s + 1 = t$ il vient :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds = \int_0^{+\infty} e^{-y(t-1)} t^y dt = e^y \int_0^{+\infty} e^{-yt} t^y dt$$

On a par ailleurs , en effectuant le changement de variable $yt = u$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-yt} t^y dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^y y^{-y} y^{-1} du = y^{-y} y^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^y du$$

Donc :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds = e^y y^{-y} \left(y^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^y du \right)$$

Compte tenu de la relation (1) il vient :

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(s)} ds$$

2a. L'application $v_x : t \mapsto e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha$ est positive continue sur $[\delta, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 v_x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+2} e^{-\frac{t}{x}} = 0$. il en découle que l'intégrale $\int_\delta^{+\infty} v_x(t) dt$ est convergente, donc v_x étant positive, elle est intégrable sur $[\delta, +\infty[$.

On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathcal{P}(n)$:

$$\mathcal{P}(n) : \forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt = o(x^n) \text{ quand } x \rightarrow 0^+$$

• **Démarrage** : $\mathcal{P}(0)$ n'est autre que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Soit (x_n) une suite à valeurs dans $]0, 1]$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, démontrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x_n}} t^\alpha dt = 0 \tag{2}$$

pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominée. posons $f_n(t) = e^{-\frac{t}{x_n}} t^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [\delta, +\infty[$. Chaque f_n est continue sur $[\delta, +\infty[$ et il est aisé de voir que (f_n) converge simplement vers l'application nulle sur l'intervalle $[\delta, +\infty[$.

Puisque $x_n \in]0, 1]$ on a $\frac{t}{x_n} \geq t$ donc $e^{-\frac{t}{x_n}} \leq e^{-t}$ de sorte que $|f_n(t)| \leq g(t) = e^{-t} t^\alpha$ pour tout $t \in [\delta, +\infty[$. L'application g est continue intégrable sur $[\delta, +\infty[$ le théorème de convergence dominée s'applique et on a le résultat désiré.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt &= \left[-x e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha \right]_\delta^{+\infty} + x \alpha \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha-1} dt \\ &= \underbrace{x \delta^\alpha e^{-\frac{\delta}{x}}}_{U(x)} + \alpha x \underbrace{\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha-1} dt}_{V(x)} \end{aligned}$$

On a, quand x tends vers 0^+ : $U(x) = o(x^{n+1})$ car : $\frac{U(x)}{x^{n+1}} = \delta^\alpha x^{-n} e^{-\frac{\delta}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et, par hypothèse de récurrence, on a $V(x) = o(x^n)$ donc $\alpha x V(x) = o(x^{n+1})$. Notons que $\mathcal{P}(n)$ est formulée de sorte que la propriété concerne toute valeur réelle de α pour n entier donnée. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et cela finit d'établir le résultat demandé.

Déduction :

On a $\rho_N(t) = f(t) - \sum_{k=0}^N a_k t^{\alpha_k}$ où $\alpha_k = \frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Remarquons que si $\delta < 1$ alors f étant continue sur $[\delta, 1]$, elle y est bornée. Si $C_1 = \max_{[\delta, 1]} |f|$ on a :

$$\forall t \geq \delta \quad |f(t)| \leq C_1 + Ct^K$$

inégalité valable aussi dans le cas où $\delta \geq 1$. Alors, pour tout $t \geq \delta$, on a :

$$|\rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}}| \leq C_1 e^{-\frac{t}{x}} + Ct^K e^{-\frac{t}{x}} + \sum_{k=0}^N |a_k| t^{\alpha_k} e^{-\frac{t}{x}}$$

Par conséquent, on a :

$$\left| \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{N+2} \int_{\delta}^{+\infty} b_k t^{\beta_k} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

avec $b_k = |a_k|$ et $\beta_k = \alpha_k$ si $0 \leq k \leq N$ et $(b_{N+1}, \beta_{N+1}, b_{N+2}, \beta_{N+2}) = (C_1, 0, C, K)$
D'après le résultat obtenu ci-dessus, on a

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt = o(x^n)$$

quand $x \rightarrow 0^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2b. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\rho_N(t) = o(t^\alpha)$ avec $\alpha = \frac{N+\lambda-\mu}{\mu}$ quand $t \rightarrow 0^+$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0, \delta[\quad |\rho_N(t)| \leq \varepsilon t^\alpha$$

Alors, on a pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}} |\rho_N(t)| dt \leq \varepsilon \int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt$$

Par le changement de variable $\frac{t}{x} = u$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} e^{-\frac{t}{x}} t^\alpha dt &= \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} x^\alpha u^\alpha x du \\ &= x^{\alpha+1} \int_0^{\frac{\delta}{x}} e^{-u} u^\alpha du \\ &\leq x^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^\alpha du \\ &= x^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1) \end{aligned}$$

En remarquant que $\alpha + 1 = \frac{N+\lambda}{\mu}$, on obtient :

$$\forall x > 0 \quad \left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq C' \varepsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (3)$$

avec $C' = \Gamma\left(\frac{N+\lambda}{\mu}\right)$.

2c. Soit $\varepsilon > 0$. d'après la question **2b.**, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^\delta e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

(On a appliqué le **2b.** pour $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2C'}$.)

Pour δ ainsi trouvé, on a d'après **2a.** :

$$\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt = o(x^n) \text{ quand } x \rightarrow 0^+$$

où

$$n = 1 + \text{Ent} \left(\frac{N + \lambda}{\mu} \right)$$

(Ent désigne l'application partie entière.)

On a alors $o(x^n) = o(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}})$, donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \eta[\quad \left| \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^{\frac{N+\lambda}{\mu}} \quad (4)$$

En combinant (3) et (4) on obtient :

$$\forall x \in]0, \eta[\quad \left| \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt \right| \leq \varepsilon x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}$$

Ce qui exprime le fait que quand $x \rightarrow 0^+$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} \rho_N(t) dt = o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

2d. $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} f(t) dt$. Fixons $x > 0$. L'application $u : t \mapsto f(t)e^{-\frac{t}{x}}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$. L'intégrale en question est impropre aux deux bornes 0 et $+\infty$ de l'intervalle I .

En 0, on sait que l'on a au voisinage de 0 :

$$f(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^{\alpha_k} + o(t^{\alpha_N})$$

avec $\alpha_k = \frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

En particulier on a $f(t) = O(t^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}})$ avec $\frac{\lambda-\mu}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} - 1$ donc $t^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}} = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, ce qui donne $u(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, donc l'intégrale $\int_0^1 u(t)dt$ est convergente.

En $+\infty$: On sait par hypothèse que $\forall t \geq 1$ on a $|f(t)| \leq Ct^K$, il en découle que $|u(t)| \leq Ce^{-\frac{t}{x}t^K}$ et comme $t^2(Ce^{-\frac{t}{x}t^K}) = Ce^{-\frac{t}{x}t^{K+2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} u(t)dt$ converge. En conclusion F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

• On a $f(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^{\alpha_k} + \rho_N(t)$ où $\alpha_k = \frac{k+\lambda-\mu}{\mu}$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Donc pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} f(t) dt = \left(\sum_{k=0}^N a_k \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha_k} dt \right) + \int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

D'après la question **2c.**, on a

$$\int_0^{+\infty} \rho_N(t) e^{-\frac{t}{x}} dt = o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

Par ailleurs, $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a : par le changement de variables $\frac{t}{x} = u$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{\alpha_k} dt = x^{\alpha_k+1} \int_0^{+\infty} u^{\alpha_k} e^{-u} du = x^{\alpha_k+1} \Gamma(\alpha_k + 1)$$

Comme $\alpha_k + 1 = \frac{k+\lambda}{\mu}$ il vient :

$$F(x) = \sum_{k=0}^N a_k \Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\mu}\right) x^{\frac{k+\lambda}{\mu}} + o\left(x^{\frac{N+\lambda}{\mu}}\right)$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

3. rappelons que $\phi(s) = s - \ln(s+1), \forall s \in]-1, +\infty[$.

3a. ϕ est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et

$$\forall s \in] - 1, +\infty[, \quad \phi'(s) = \frac{s}{s+1}$$

Donc ϕ' a le même signe que $s \mapsto s$. Donc $\phi' < 0$ sur $] - 1, 0[$ et $\phi' > 0$ sur $]0, +\infty[$ et s'annule au point 0. On a $\lim_{s \rightarrow -1^+} \phi(s) = +\infty$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = +\infty$ car $\phi(s) \sim s$

On a, au voisinage de $+\infty$: $\frac{\phi(s)}{s} \sim 1$ et $\phi(s) - s \sim -\ln(s+1) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$, donc le graphe de ϕ admet une branche parabolique de directions la première bissectrice au voisinage de $+\infty$.

ϕ restreinte à $] - 1, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$) est continue strictement décroissante (resp. croissante) donc réalise une bijection de $] - 1, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$) vers $]0, +\infty[$.

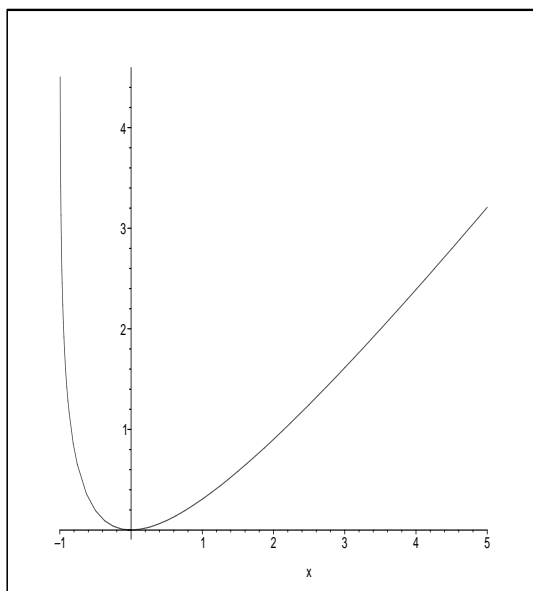


FIGURE 1 – Graphe de ϕ

3b. On sait que $s \mapsto \ln(1+s)$ est développable en série entière à l'origine avec le rayon de convergence $R = 1$, et que

$$\forall s \in]-1, 1[, \quad \ln(1+s) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{s^k}{k}.$$

Donc pour tout $s \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \phi(s) &= s - \ln(1+s) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k} \\ &= s^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^{k-2}}{k} \\ &= s^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k+2} \end{aligned}$$

3c. On dispose des développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\phi(s) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{4}s^4 + o(s^4) \quad (5)$$

$$g(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k q^k = A(q) + o(q^4) \quad (6)$$

où $A(q) = \sum_{k=1}^4 a_k q^k$ et la suite (a_k) désigne l'une des suites (b_k) ou (c_k) .

Par composition des dl, on en déduit, en notant $\text{Tronc}_4(P)$ la troncature au degré 4 du polynôme P :

$$\phi(g(q)) = \frac{1}{2} \text{Tronc}_4(A^2(q)) - \frac{1}{3} \text{Tronc}_4(A^3(q)) + \frac{1}{4} \text{Tronc}_4(A^4(q)) + o(q^4)$$

On a : $A(q) = a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4$ donc

$$\begin{aligned} \text{Tronc}_4(A^2(q)) &= a_1^2 q^2 + 2a_1 a_2 q^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) q^4 \\ \text{Tronc}_4(A^3(q)) &= a_1^3 q^3 + 3a_1^2 a_2 q^4 \\ \text{Tronc}_4(A^4(q)) &= a_1^4 q^4 \end{aligned}$$

donc

$$q^2 = \frac{1}{2} a_1^2 q^2 + (a_1 a_2 - \frac{1}{3} a_1^3) q^3 + (\frac{1}{2} a_2^2 + a_1 a_3 - a_1^2 a_2 + \frac{1}{4} a_1^4) q^4 + o(q^4).$$

Par unicité d'un tel dl, il vient :

$$\begin{cases} a_1^2 = 2 \\ 3a_1 a_2 - a_1^3 = 0 \\ 2a_2^2 + 4a_1 a_3 - 4a_1^2 a_2 + a_1^4 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a_1^2 = 2 \\ a_2 = \frac{2}{3} \\ a_1 a_3 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

ce qui fournit les solutions :

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_2 = \frac{2}{3} \\ a_3 = \frac{1}{9\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = -\sqrt{2} \\ a_2 = \frac{2}{3} \\ a_3 = -\frac{1}{9\sqrt{2}} \end{cases}$$

Comme $b_1 > 0$ et $c_1 < 0$ on en déduit que : $\begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_2 = \frac{2}{3} \\ b_3 = \frac{1}{9\sqrt{2}} \end{cases}$ et $\begin{cases} c_1 = -\sqrt{2} \\ c_2 = \frac{2}{3} \\ c_3 = -\frac{1}{9\sqrt{2}} \end{cases}$

D'après l'énoncé, il existe $\rho > 0$ tel que les séries entières $\sum b_n q^n$ et $\sum c_n q^n$ convergent sur $I_\rho =]-\rho, \rho[$. Notons φ_1 et φ_2 les applications associées à ses séries. Alors au voisinage de 0, on a :

$$\begin{cases} \phi(\varphi_1(q)) \sim \sqrt{2} q \\ \phi(\varphi_2(q)) \sim -\sqrt{2} q \end{cases}$$

Pour tout $q \in]-\rho, \rho[$, on a : $\phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k q^k\right) = \phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k q^k\right) = q^2$. Or , au voisinage de 0,

on a $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k q^k \sim b_1 q$ (resp. $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k q^k \sim c_1 q$) et on a par hypothèse $b_1 > 0$ (resp. $c_1 < 0$)

,il en résulte qu'au voisinage de 0, on a :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k q^k = \phi_+^{-1}(q^2) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q^k = \phi_-^{-1}(q^2) \end{cases} \quad (7)$$

On en déduit, en particulier (compte tenu des données admises de l'énoncé) que l'application $q \mapsto \phi_+^{-1}(q^2)$ (resp. $q \mapsto \phi_-^{-1}(q^2)$) est développable en série entière à l'origine, par suite on peut dériver terme à terme les relations (7) ci-dessus sur l'intervalle $J_\rho =]-\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho}[$ On a sur cet intervalle :

$$\begin{cases} 2q(\phi_+^{-1})'(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{k-1} \\ 2q(\phi_-^{-1})'(q^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{k-1} \end{cases} \quad (8)$$

Ce qui donne pour $q \neq 0$ et $q \in J_\rho$

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{k-2} \\ (\phi_-^{-1})'(q^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{k-2} \end{cases} \quad (9)$$

Donc on a en particulier pour $q \in]0, \rho[$:

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kb_k q^{\frac{k-2}{2}} \\ (\phi_-^{-1})'(q) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k q^{\frac{k-2}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

Ce qui, donne, en particulier les développements asymptotiques suivants pour $q > 0$ voisin de 0 :

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{2}(b_1 q^{-\frac{1}{2}} + 2b_2 + 3b_3 q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}})) \\ (\phi_-^{-1})'(q) = \frac{1}{2}(c_1 q^{-\frac{1}{2}} + 2c_2 + 3c_3 q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}})) \end{cases} \quad (11)$$

Compte tenu des valeurs trouvées ci-dessus, il vient :

$$\begin{cases} (\phi_+^{-1})'(q) = \frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{q} + o(\sqrt{q}) \\ (\phi_-^{-1})'(q) = -\frac{1}{\sqrt{2q}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{q} + o(\sqrt{q}) \end{cases} \quad (12)$$

3d. D'après **1b.**, on a : $\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt$.

On a :

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt = \int_{-1}^0 e^{-y\phi(t)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt.$$

Dans chacune des intégrales du membre droite, le changement de variable $u = \phi(q)$ est licite puisque la restriction de ϕ à l'intervalle $] -1, 0[$ (resp $]0, +\infty[$) est une application de classe C^1 strictement décroissante (resp. croissante). En adoptant ce changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} e^{-y\phi(t)} dt &= - \int_0^{+\infty} e^{-yq} (\phi_-^{-1})'(q) dq + \int_0^{+\infty} e^{-yq} (\phi_+^{-1})'(q) dq \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-yq} ((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q)) dq. \end{aligned}$$

Donc, en conclusion :

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq} ((\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q)) dq.$$

3e. Considérons l'application $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, q \mapsto g(q) = (\phi_+^{-1})'(q) - (\phi_-^{-1})'(q)$. Alors, on a :

$$\forall y > 0 \quad \Gamma(y) = e^{-y} y^y \int_0^{+\infty} e^{-yq} g(q) dq \quad (13)$$

D'après la question 3c., l'application g admet au voisinage de 0 le développement limité :

$$g(q) = \sqrt{2} q^{-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} q^{\frac{1}{2}} + o(q^{\frac{1}{2}}). \quad (14)$$

Par ailleurs soit $q \geq 1$ alors $g(q) = \frac{1}{\phi'(u_2)} - \frac{1}{\phi'(u_1)}$ où $u_2 = \phi_+^{-1}(q)$ et $u_1 = \phi_-^{-1}(q)$. Comme $q \in [1, +\infty[$, on a $u_1 \in]-1, \alpha_1]$ et $u_2 \in [\alpha_2, +\infty[$ où $\alpha_1 = \phi_-^{-1}(1)$ et $\alpha_2 = \phi_+^{-1}(1)$. Notons que pour tout $s \in]-1, +\infty[$, on a $\varphi'(s) = \frac{s}{s+1}$ de sorte que pour tout $s \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, on a $:\frac{1}{\varphi'(s)} = \frac{s+1}{s}$. En particulier $s \mapsto \frac{1}{\varphi'(s)}$ est bornée sur $] -1, \alpha_1] \cup [\alpha_2, +\infty[$. ce qui permet de dire qu'il existe une constante réelle strictement positive C tel que $|g(q)| \leq C$. Ainsi les hypothèses requises pour appliquer le résultat de la question 2d. sont satisfaites. Précisément :

Pour $N = 2, \lambda = 1, \mu = 2$, on a :

$$g(q) = \sum_{k=0}^N a_k q^{\frac{k+\lambda-\mu}{\mu}} + o(q^{\frac{N+\lambda-\mu}{\mu}}) \quad (15)$$

Avec $a_0 = \sqrt{2}$, $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Notons que (15) n'est autre que (14) ci-dessus. On a aussi : Il existe une constante $C > 0$ et un entier K (à savoir $K = 0$) tel que pour tout $q \geq 1$, on a $g(q) \leq Cq^K$.

Si pour tout $x > 0$, on pose :

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{q}{x}} g(q) dq = \int_0^{+\infty} e^{-qy} g(q) dq = G(y)$$

où $y = \frac{1}{x}$, on a compte tenu de 2d. : Quand y tends vers $+\infty$ on a :

$$G(y) = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}} + o\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

On a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, donc :

$$\begin{aligned} G(y) &= \sqrt{\frac{2\pi}{y}} \frac{1}{y} + \frac{1}{6} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{y}} \frac{1}{y} + o\left(\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right)\right). \end{aligned}$$

Finalement, et compte tenu de (13) ci-dessus on a, quand y tends vers $+\infty$:

$$\Gamma(y) = e^{-y} y^y \left(\frac{2\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{12y} + o\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

Deuxième partie

4. Soit $x \in]0, +\infty[$. L'application $u : t \mapsto e^{-\frac{t}{x}} t^{-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale définissant F est donc impropre uniquement à la borne $+\infty$. On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 u(t) = 0$, donc par critère de comparaison, l'intégrale en question converge.

Remarquons que pour tout $X > 1$, on a :

$$\int_1^X u(t) dt = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{X}{x}} \frac{e^{-s}}{s} ds$$

d'où l'on déduit :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{e^{-s}}{s} ds \right) + c$$

où : $c = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds$. On a alors $F = -\Phi \circ v$ où $v : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, v(x) = \frac{1}{x}$ et $\Phi :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x) = c - \int_1^x \frac{e^{-s}}{s} ds$ et on voit que :

- Φ est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ car elle y est dérivable et sa dérivée est de classe C^∞ .
- v est de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$. Donc F est de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$.

5. Par récurrence sur N :

• Pour $N = 1$: On a : $F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-1} dt$. Comme l'application $t \mapsto -x e^{-\frac{t}{x}} t^{-1}$ admet des limites en 1 et en $+\infty$, une intégration par partie est validée :

$$F(x) = \left[-x e^{-\frac{t}{x}} t^{-1} \right]_1^{+\infty} - x \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-2} dt = x e^{-\frac{1}{x}} - x \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-2} dt$$

Donc : $F(x) = S_1(x) + R_1(x)$.

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $F(x) = S_N(x) + R_N(x), \forall x > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt = x e^{-\frac{1}{x}} - x \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+2)} dt$$

Donc

$$R_N(x) = (-1)^N N! x^{N+1} e^{-\frac{1}{x}} + (-1)^{N+1} x^{N+1} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+2)} dt$$

Par suite $F(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x), \forall x > 0$. Ce qui achève la démonstration du résultat demandé par récurrence.

6a. Il s'agit d'une série entière de coefficient $a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$, donc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est nul, donc la série demandée converge uniquement pour $x = 0$.

On a $|R_N(x)| = N!x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt$. Par le changement de variable $s = \frac{t}{x}$, on a :

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= N!x^N \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s} x^{-(N+1)} x^{-(N+1)} x ds \\ &= N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s} s^{-(N+1)} ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\geq N!e^{-\frac{1}{x}} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} s^{-(N+1)} ds \\ &= N!e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{Nx^N} \\ &= \frac{(N-1)!}{x^{N-1}} x e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ est convergente son terme général tend vers 0 donc on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N-1)!}{x^{N-1}} = +\infty$ et par suite, $\forall x > 0$, la suite $(R_N(x))_{N \geq 1}$ n'est pas bornée.

6b. On a vu en **6a.** la relation :

$$|R_N(x)| = N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s} s^{-(N+1)} ds$$

L'application $s \mapsto s^{N+1}$ est croissante sur l'intervalle $I_x = [\frac{1}{x}, +\infty[$, donc la valeur maximale de $s^{-(N+1)}$ sur l'intervalle I_x correspond à $s = \frac{1}{x}$, ce qui fournit :

$$|R_N(x)| \leq x^{N+1} N! \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} e^{-s} ds = x^{N+1} N! e^{-\frac{1}{x}} = |r_N(x)|$$

Montrons que $R_{N+1}(x) = o(r_N(x))$ quand $x \rightarrow 0$.

On a d'après le résultat ci-dessus : $|R_{N+1}(x)| \leq |r_{N+1}(x)|$.

On a par ailleurs : $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1)x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $r_{N+1}(x) = o(r_N(x))$ quand $x \rightarrow 0$ et le résultat désiré en découle.

6c. D'après la question **5.**, on a :

$$\forall(N, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = S_N(x) + R_N(x) = S_{N+1}(x) + R_{N+1}(x).$$

En particulier, on a :

$$\forall(N, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad R_N(x) = R_{N+1}(x) + S_{N+1}(x) - S_N(x) = r_N(x)$$

donc, compte tenu de **6b.**, on a :

$$|R_N(x) - r_N(x)| = |R_{N+1}(x)| = o(r_N(x))$$

quand $x \rightarrow 0$, ce qui prouve que

$$R_N(x) \sim r_N(x)$$

quand $x \rightarrow 0$.

6d. On a $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} = (N+1)x$. Donc : $\frac{|r_{N+1}(x)|}{|r_N(x)|} \leq 1 \Leftrightarrow N \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow N \leq N_x$ où $N_x = \text{Ent} \frac{1}{x}$. Il en résulte que la suite $(|r_N(x)|)$ est décroissante jusqu'au rang N_x et elle devient croissante à partir de $N_x + 1$. Notons que N_x est bien un entier naturel non nul puisqu'on a supposé que $x < \frac{1}{2}$.

7a. On a $N = 2M$. puisque $0 < x \leq \frac{1}{N}$, la suite $(|r_n(x)|)_{1 \leq n \leq N}$ est décroissante.

On a $E_N(x) = \frac{|R_N(x)|}{|F(x)|}$.

$|R_N(x)| \leq |r_N(x)| = N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}} \leq N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}}$. Ainsi :

$$|R_N(x)| \leq N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}} \tag{16}$$

$F(x) = S_N(x) + R_N(x)$. Notons que $R_N(x) \geq 0$ car N est pair, donc

$$R_N(x) = (-1)^N N!x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt = N!x^N \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}} t^{-(N+1)} dt$$

D'autre part :

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^N r_k(x) = \widehat{S}_N(x) + r_N(x)$$

où

$$\widehat{S}_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k(x)$$

et comme $(-1)^k r_k(x) > 0$, on a $r_k(x) = (-1)^k |r_k(x)|$, donc :

$$\widehat{S}_N(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k |r_k(x)| = \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} |r_{2\ell}(x)| - |r_{2\ell+1}(x)| \right)$$

Compte tenu de la décroissance de $(|r_n(x)|)_{1 \leq n \leq N}$ il en découle que $\widehat{S}_N(x) > 0$, cette inégalité étant stricte car $r_0(x) + r_1(x) = (x - x^2)e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

Ce qui précède montre que l'on a : on a $|F(x)| = \widehat{S}_N(x) + r_{2M}(x) + R_N(x)$ et $\widehat{S}_n(x) > 0$ et $r_{2M}(x) \geq 0$ et $R_N(x) \geq 0$, donc :

$$|F(x)| \geq \widehat{S}_N(x) > 0 \quad (17)$$

Il résulte de (16) et (17) que :

$$|E_N(x)| \leq \frac{N!x^{N+1}e^{-\frac{1}{x}}}{\widehat{S}_N(x)}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \widehat{S}_N(x) &= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} r_{2\ell}(x) + r_{2\ell+1}(x) \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} ((2\ell)!x^{2\ell+1} - (2\ell+1)!x^{2\ell+2}) \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^{M-1} ((2\ell)!x^{2\ell+1}(1 - (2\ell+1)x)) \right) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

7b. Si on applique l'inégalité précédente à $N = 4$ et $x = \frac{1}{10}$ on obtient :

$$E_4\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{24 \cdot 10^{-5}}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)10^{-1} + \left(1 - \frac{3}{10}\right)2 \cdot 10^{-3}} \leq \frac{24}{9}10^{-3} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Troisième partie

8. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. On va démontrer qu'il existe un polynôme trigonométrique en deux variables P tel que $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$. Par définition, f est défini par :

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^n f_k(\theta_1)g_k(\theta_2)$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_k, g_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sans nuire à la généralité on peut supposer que tous les f_k sont non nuls (en effet, la formule ci-dessus donnant $f(\theta)$ est valable si on somme sur les indices k tel que $f_k \neq 0$.) Soit alors

$$M = \sum_{k=1}^n (2\|f_k\|_{\infty} + \|g_k\|_{\infty})$$

et

$$\varepsilon' = \min\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \min_{1 \leq k \leq n} \|f_k\|_\infty\right)$$

Par densité dans le cas de $d = 1$, il existe des polynômes trigonométriques en une variables P_k, Q_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \begin{cases} \|f_k - P_k\|_\infty < \varepsilon' \\ \|g_k - Q_k\|_\infty < \varepsilon' \end{cases}$$

Soit P l'application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$P(\theta) = P(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k=1}^n P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2)$$

Alors P est un polynôme trigonométriques en deux variables car si on écrit (K_1, K_2 étant des parties finies de \mathbb{Z}) :

$$\begin{cases} P_k(\theta_1) = \sum_{j \in K_1} c_j e^{2i\pi j \theta_1} \\ Q_k(\theta_2) = \sum_{\ell \in K_2} d_\ell e^{2i\pi \ell \theta_2} \end{cases}$$

alors

$$P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2) = \sum_{(j, \ell) \in K_1 \times K_2} c_j d_\ell e^{2i\pi(j\theta_1 + \ell\theta_2)}.$$

Par combinaison linéaire, P est un polynôme trigonométrique en les variables θ_1 et θ_2 . Pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ on a :

$$\begin{aligned} |f(\theta) - P(\theta)| &= \left| \sum_{k=1}^n (f_k(\theta_1)g_k(\theta_2) - P_k(\theta_1)Q_k(\theta_2)) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n (f_k(\theta_1) - P_k(\theta_1))g_k(\theta_2) + P_k(\theta_1)(g_k(\theta_2) - Q_k(\theta_2)) \right| \\ &\leq \varepsilon' \left(\sum_{k=1}^n (\|g_k\|_\infty + \|P_k\|_\infty) \right) \end{aligned}$$

Notons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\|P_k\|_\infty \leq \varepsilon' + \|f_k\|_\infty \leq 2\|f_k\|_\infty$, donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2 \quad |f(\theta) - P(\theta)| \leq \varepsilon' \left(\sum_{k=1}^n (\|g_k\|_\infty + 2\|f_k\|_\infty) \right) = \varepsilon' M$$

Par passage à la borne supérieure sur $\theta \in \mathbb{R}^2$, il vient :

$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon' M \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

9. L'application ψ_j est continue sur $I =]0, \frac{1}{2}]$ car $u : t \mapsto u(t) = 0$ et $v : t \mapsto v(t) = 1 - j|t|$ sont continues sur I donc l'application $\max(u, v)$ est continue sur I , en particulier on a $\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \psi_j(t) = \max(0, v(-\frac{1}{2})) = \max(0, v(\frac{1}{2})) = \psi(-\frac{1}{2})$, donc ψ est continue sur \mathbb{R} .

L'application $t \mapsto t - \frac{k}{j}$ est continue sur \mathbb{R} car affine. Par composition, l'application $\psi_{j,k}$ est continue sur \mathbb{R} .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi_{j,k}(t+1) = \psi_j(t+1 - \frac{k}{j}) = \psi_j(t - \frac{k}{j}) = \psi_{j,k}(t)$. Finalement on a $\psi_{j,k} \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R})$ pour tout couple (k, j) d'entiers tel que $0 \leq k < j$.

10. On a par définition de $S_j(f)$, pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$S_j(f)(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}(\theta_1) \psi_{j,k_2}(\theta_2)$$

10a. Il est clair que pour tout $k = (k_1, k_2) \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket^2$, les applications

$$f_k : \theta_1 \mapsto f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}(\theta_1)$$

et

$$g_k : t \mapsto \psi_{j,k_2}(\theta_2)$$

sont continues 1-périodiques et que

$$f(\theta) = \sum_{(k_1, k_2) \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket^2} f_{k_1}(\theta_1) g_{k_2}(\theta_2)$$

pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, donc $f \in \mathcal{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$.

Soit $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^2$. On a ;

$$\begin{aligned} S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_{j,k_1}\left(\frac{\ell_1}{j}\right) \psi_{j,k_2}\left(\frac{\ell_2}{j}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_j\left(\frac{\ell_1 - k_1}{j}\right) \psi_j\left(\frac{\ell_2 - k_2}{j}\right) \end{aligned}$$

Si $r_1(k)$ et $r_2(k)$ dénotent les restes respectifs de la division euclidienne de $\ell_1 - k$ et $\ell_2 - k$ par j alors par périodicité de ψ_j , on a :

$$S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) = \sum_{k_1=0}^{j-1} \sum_{k_2=0}^{j-1} f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_j\left(\frac{r_1(k_1)}{j}\right) \psi_j\left(\frac{r_2(k_2)}{j}\right) \quad (18)$$

Remarquons que pour tout $\nu \in \{1, 2\}$ et tout $k \in \llbracket 0, j-1 \rrbracket$, on a $0 \leq r_\nu(k) < j$ de sorte que $\frac{r_\nu(k)}{j} \in [0, 1[$ et deux cas sont possibles :

- Si $\frac{r_\nu(k)}{j} \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) = \max(0, 1 - r_\nu(k))$ par suite $\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) \neq 0$ uniquement si $r_\nu(k) = 0$ ce qui veut dire k est le reste de la division euclidienne de ℓ_ν par j .
- Si $\frac{r_\nu(k)}{j} \in]\frac{1}{2}, 1[$ alors $\frac{r_\nu(k)}{j} - 1 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ ce qui donne

$$\psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j}\right) = \psi_j\left(\frac{r_\nu(k)}{j} - 1\right) = \psi_j\left(\frac{r_\nu(k) - j}{j}\right) = \max(0, 1 - j + r_\nu(k)) = 0$$

puisque $r_\nu(k) \leq j - 1$ donc $1 - j + r_\nu(k) \leq 0$.

Cette étude montre que les termes du second membre de la relation (18) sont tous nuls sauf celui d'indice (k_1, k_2) tel que $(r_1(k_1), r_2(k_2)) = (0, 0)$, ce qui veut dire que k_1 et k_2 sont les restes respectifs de ℓ_1 et ℓ_2 dans la division euclidienne par j , de sorte que :

$$S_j(f)\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) = f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) \psi_j\left(\frac{0}{j}\right) \psi_j\left(\frac{0}{j}\right) = f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) = f\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right)$$

10b. Soit $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \left[\frac{k_1}{j}, \frac{k_1+1}{j}\right[\times \left[\frac{k_2}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right[$, alors il existe $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ tel que :

$$\begin{cases} \theta_1 = (1 - t_1)\frac{k_1}{j} + t_1\frac{k_1+1}{j} \\ \theta_2 = (1 - t_2)\frac{k_2}{j} + t_2\frac{k_2+1}{j} \end{cases}$$

On a :

$$S_j(f)(\theta) = \sum_{\ell_1=0}^{j-1} \sum_{\ell_2=0}^{j-1} f\left(\frac{\ell_1}{j}, \frac{\ell_2}{j}\right) \psi_{j,\ell_1}(\theta_1) \psi_{j,\ell_2}(\theta_2)$$

Soit $\ell \in \llbracket 0, j - 1 \rrbracket$. On a :

$$\psi_{j,\ell}(\theta_1) = \psi_j\left(\theta_1 - \frac{\ell}{j}\right) = \max(0, 1 - |j\theta_1 - \ell|)$$

Or : $j\theta_1 - \ell = (1 - t_1)k_1 + t_1(k_1 + 1) - \ell = (k_1 - \ell) + t_1$

• Si $\ell = k_1$ on obtient $j\theta_1 - \ell = t_1$ donc $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 1 - t_1$

• Si $\ell = k_1 + 1$ on obtient $j\theta_1 - \ell = t_1 - 1$ donc $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = t_1$

• Si $\ell \notin \{k_1, k_1 + 1\}$ alors deux cas sont possibles :

- soit $\ell < k_1$, donc $\ell \leq k_1 - 1$ et $1 \leq k_1 - \ell$ donc $|j\theta_1 - \ell| = (k_1 - \ell) + t_1 \geq 1$ et par suite : $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 0$

- Soit $k_1 + 1 < \ell$ donc $k_1 + 2 \leq \ell$ et par suite $k_1 - \ell \leq -2$ et $k_1 - \ell + t_1 \leq -1$ d'où $|j\theta_1 - \ell| \geq 1$ et $(k_1 - \ell) + t_1 \geq 1$ et par suite : $\psi_{j,\ell}(\theta_1) = 0$

En conclusion, on a :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, j - 1 \rrbracket \quad \psi_{j,\ell}(\theta_1) = \begin{cases} 1 - t_1 & \text{si } \ell = k_1 \\ t_1 & \text{si } \ell = k_1 + 1 \\ 0 & \text{si } \ell \notin \{k_1, k_1 + 1\} \end{cases}$$

Une étude similaire pour $\psi_{j,\ell}(\theta_2)$ donne les mêmes résultats à savoir :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, j - 1 \rrbracket \quad \psi_{j,\ell}(\theta_2) = \begin{cases} 1 - t_2 & \text{si } \ell = k_2 \\ t_2 & \text{si } \ell = k_2 + 1 \\ 0 & \text{si } \ell \notin \{k_2, k_2 + 1\} \end{cases}$$

Il en résulte que :

$$S_j(f)(\theta) = \lambda_1 f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) + \lambda_2 f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right) + \lambda_3 f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right) + \lambda_4 f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right)$$

où $\lambda_1 = t_1 t_2$, $\lambda_2 = t_1(1-t_2)$, $\lambda_3 = (1-t_1)t_2$, $\lambda_4 = (1-t_1)(1-t_2)$

On remarque que $\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$, ce qui prouve que $f(\theta)$ est la barycentre des points

$$f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right), f\left(\frac{k_1+1}{j}, \frac{k_2}{j}\right), f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2+1}{j}\right), f\left(\frac{k_1}{j}, \frac{k_2}{j}\right)$$

affectés des poids respectifs : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Déduction : Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq 2$. L'application

$$g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto |S_j(f)(\theta) - f(\theta)|$$

est continue sur \mathbb{R}^2 . Notons que si $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ alors il existe un unique couple (m_1, m_2) d'entiers relatifs et $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ tel que $x_k + m_k = \theta_k, k \in \{1, 2\}$. par périodicité on a $g_j(\theta_1, \theta_2) = g_j(x_1, x_2)$ de sorte que $g_j(\mathbb{R}^2) = g_j([0, 1]^2)$. par compacité de $[0, 1]^2$ et continuité de g_j il existe $\theta_j \in [0, 1]^2$ tel que

$$\|S_j(f) - f\|_\infty = |S_j(f)(\theta_j) - f(\theta_j)|$$

D'après la question précédente on a : $S_j(f)(\theta_j) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k f(u_k)$ où λ_k sont positifs et

$\sum_{k=1}^4 \lambda_k = 1$ et u_k sont des points de \mathbb{R}^2 tel que $d(u_k, \theta) \leq \frac{1}{j}$ pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

Il en découle que

$$\|S_j(f) - f\|_\infty = S_j(f)(\theta_j) - f(\theta_j) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k (f(u_k) - f(\theta_j))$$

de sorte que l'on a :

$$\|S_j(f) - f\|_\infty \leq \sum_{k=1}^4 |f(u_k) - f(\theta_j)|$$

f étant continue sur le compact $[0, 1]^2$, elle y est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]^2$, on a :

$$d(x, y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit j_0 un entier tel que $j_0 \geq 2$ et $\frac{1}{j_0} < \eta$.

Pour tout $j \geq j_0$ on a : $d(u_j, \theta_j) \leq \frac{1}{j} < \eta$ donc $|f(u_j) - f(\theta_j)| < \frac{\varepsilon}{4}$ et par suite :

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0 \Rightarrow \|S_j(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|S_j(f) - f\|_\infty = 0$.

11. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question **10**, il existe $f_1 \in \mathcal{C}_{\text{sep}}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\|f - f_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la question **8**, il existe un polynôme trigonométrique à deux variables P tel que : $\|f_1 - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Il en découle que :

$$\|f - P\|_\infty \leq \|f - f_1\|_\infty + \|f_1 - P\|_\infty < \varepsilon$$

Quatrième partie

12. Comme $x = 0$, le système devient : $\begin{cases} F'(t) = f(\alpha(t)) \\ \alpha'(t) = \omega \end{cases}$

Il en découle que

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \omega d\tau = t\omega \quad \text{et} \quad F'(t) = f(t\omega).$$

Donc

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(\tau\omega) d\tau$$

et comme $F(0) = 0$ il vient :

$$F(t) = \int_0^t f(\tau\omega) d\tau.$$

13. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\theta) = e^{2\pi i(k \cdot \theta)}.$$

où $k = (k_1, k_2)$ défini par l'énoncé tel que $k \cdot \omega = 0$. On voit facilement que f est un polynôme trigonométrique 1-périodique.

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x) dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i k_1 x_1} e^{2\pi i k_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \left(\int_0^1 e^{2\pi i k_1 x_1} dx_1 \right) \left(\int_0^1 e^{2\pi i k_2 x_2} dx_2 \right) = 1 \end{aligned}$$

Finalement pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $f(t\omega) = e^{2\pi i t(k \cdot \omega)} = 1$ puisque $k \cdot \omega = 0$ d'après l'hypothèse selon laquelle ω est résonnant.

Il en résulte que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \int_0^t 1 d\tau = t$$

14 On suppose que ω est non résonnant, donc $\forall k \in \mathbb{Z}^2 \quad k \cdot \omega \neq 0$

14a. Posons, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\theta) = \sum_{k \in K} c_k e^{2i\pi(k \cdot \theta)}$$

avec K une partie finie de \mathbb{Z}^2 et les c_k des nombres complexes.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(t) = \int_0^t f(\tau\omega) d\tau = \int_0^t \left(\sum_{k \in K} c_k e^{2i\pi\tau(k \cdot \omega)} \right) d\tau$$

Comme $(k, \omega) \neq 0$, on dispose d'une primitive de l'intégrande, à savoir :

$$\tau \mapsto \sum_{k \in K} \frac{c_k}{2i\pi(k \cdot \omega)} e^{2i\pi\tau(k \cdot \omega)}$$

ce qui fournit :

$$F(t) = \sum_{k \in K} \frac{c_k}{2i\pi(k \cdot \omega)} (e^{2i\pi t(k \cdot \omega)} - 1)$$

il est aisé de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|F(t)| \leq M$$

avec

$$M = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in K} \frac{|c_k|}{|k \cdot \omega|}$$

Donc F est bornée.

14b. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question **11**, il existe \tilde{f} polynôme trigonométrique en deux variables tel que $\|f - \tilde{f}\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} |F(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau\omega) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau\omega) - \tilde{f}(\tau\omega)| d\tau + \left| \int_0^t \tilde{f}(\tau\omega) d\tau \right| \\ &\leq t \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_0^t \tilde{f}(\tau\omega) d\tau \right| \end{aligned}$$

Comme \tilde{f} est un polynôme trigonométrique on a d'après de la question **14a**, l'application $t \mapsto \int_0^t \tilde{f}(\tau\omega) d\tau$ est bornée donc il existe $M_1 > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_0^t \tilde{f}(\tau\omega) d\tau \right| \leq M_1$$

Comme $M_1 = o(t)$ au voisinage de $+\infty$, il existe $t_0 > 0$ tel que $t \geq t_0 \Rightarrow M_1 \leq t \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi

$$t \geq t_0 \Rightarrow |F(t)| \leq t\varepsilon$$

ce qui prouve que quand t tends vers $+\infty$, on a $F(t) = o(t)$.

15a. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2, \quad dh(\theta).\omega + g(\theta) = \nu \quad (19)$$

On sait que $dh(\theta).\omega = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) + \omega_2 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2)$.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 dh(\theta).\omega \, d\theta_1 d\theta_2 &= \omega_1 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 \right) d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 \\ &= \omega_1 \int_0^1 h(1, \theta_2) - h(0, \theta_2) \, d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 h(\theta_1, 1) - h(\theta_1, 0) \, d\theta_1 \\ &= \omega_1 \int_0^1 0 \, d\theta_2 + \omega_2 \int_0^1 0 \, d\theta_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque h est 1-périodique par rapport à chacune des deux variables θ_1 et θ_2 .

il en résulte qu'en intégrant la relation (19) on obtient :

$$\nu = \int_0^1 \int_0^1 g(\theta) \, d\theta_1 d\theta_2$$

Si les composantes g_1 et g_2 de g sont des polynômes trigonométriques en les variables θ_1 et θ_2 alors il existe une partie finie K de \mathbb{Z}^2 et des coefficients complexes $(c_k)_{k \in K}$ et $(c'_k)_{k \in K}$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^2, \quad g_1(\theta) = \sum_{k \in K} c_k e^{2i\pi(k.\theta)} \quad \text{et} \quad g_2(\theta) = \sum_{k \in K} c'_k e^{2i\pi(k.\theta)}$$

Il en découle que :

$$\int_0^1 \int_0^1 g_1(\theta) \, d\theta_1 d\theta_2 = \sum_{k \in K} c_k \int_0^1 \int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} e^{2i\pi k_2 \theta_2} \, d\theta_1 d\theta_2$$

Remarquons que pour tout $k \in K$, on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} e^{2i\pi k_2 \theta_2} \, d\theta_1 d\theta_2 = \left(\int_0^1 e^{2i\pi k_1 \theta_1} \, d\theta_1 \right) \left(\int_0^1 e^{2i\pi k_2 \theta_2} \, d\theta_2 \right)$$

puis remarquons que pour tout entier relatif m l'intégrale $I_m = \int_0^1 e^{2i\pi m t} \, dt$ vérifie

$$I_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad \text{de manière que finalement :}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_1(\theta) \, d\theta_1 d\theta_2 = c_{(0,0)}$$

Notons que si $(0, 0) \notin K$ alors $c_{(0,0)} = 0$.

Comme cette conclusion concerne aussi g_2 , on en déduit que

$$\nu = \int_0^1 \int_0^1 g(\theta) \, d\theta_1 d\theta_2 = (c_{(0,0)}, c'_{(0,0)})$$

Déduction :

Note importante :

Pour démontrer l'existence d'une solution h , il semble qu'il faut ajouter la condition (20) ci-dessous (imposée par la périodicité de h comme le montre le contre-exemple donné ci-dessous.) :

$$g(\theta) = \sum_{k \in K} e^{2i\pi(k,\theta)} C_k, \forall k \in K, \quad C_k \in \mathbb{R}^2$$

avec :

$$\forall k \in K, \quad k \cdot \omega = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0 \quad (20)$$

Notons que la condition (20) est vérifiée dans le cas particulier où ω est non résonnant.

Dans ce qui suit on va :

- ☞ démontrer l'existence de h si on ajoute cette condition
- ☞ Donner un contre-exemple dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée.

Existence de h si la condition (20) est vérifiée

On suppose donc que :

$$g(\theta) = \sum_{k \in K} e^{2i\pi(k,\theta)} C_k$$

Où K est une partie finie de \mathbb{Z}^2 et $\forall k \in K$, on a $C_k = (c_k, c'_k) \in \mathbb{R}^2$ avec la condition (20) ci-dessus, à savoir :

$$\forall k \in K, \quad k \cdot \omega = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0$$

Cherchons h sous la forme $h = (h_1, h_2)$ avec

$$h_1(\theta) = \sum_{k \in K} b_k e^{2i\pi(k,\theta)} \quad \text{et} \quad h_2(\theta) = \sum_{k \in K} b'_k e^{2i\pi(k,\theta)}$$

Notons ce qui suit :

- ☞ On a indexé par la même partie K , chose possible quitte à prendre la réunion des deux parties initiales et associer un coefficient nul quand c'est nécessaire.
- ☞ Puisque g_1 et g_2 sont à valeurs réelles alors K doit être symétrique par rapport à $(0, 0)$ et pour tout $k \in K$ on doit $c_{-k} = \overline{c_k}$ et $c'_{-k} = \overline{c'_k}$. C'est juste une remarque, elle ne sera pas nécessaire pour ce qui suit.

On a alors

$$dh(\theta) \cdot \omega = \omega_1 \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h}{\partial \theta_2} = \left(\omega_1 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}, \omega_1 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1}(\theta) + \omega_2 \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2} \right)$$

En écrivant :

$$h_1(\theta) = \sum_{k \in K} b_k e^{2i\pi(k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2)}$$

on déduit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1}(\theta) = 2i\pi \sum_{k \in K} b_k k_1 e^{2i\pi(k,\theta)} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2}(\theta) = 2i\pi \sum_{k \in K} b_k k_2 e^{2i\pi(k,\theta)} \end{cases}$$

$$dh(\theta) \cdot \omega = 2i\pi \left(\sum_{k \in K} (k \cdot \omega) b_k e^{2i\pi(k,\theta)}, \sum_{k \in K} (k \cdot \omega) b'_k e^{2i\pi(k,\theta)} \right)$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$dh(\theta).\omega = 2i\pi \sum_{k \in K} (k.\omega) e^{2i\pi(k.\theta)} B_k$$

où $B_k = (b_k, b'_k)$ Écrivons de même :

$$g(\theta) = \sum_{k \in K} (k.\omega) e^{2i\pi(k.\theta)} C_k$$

avec $C_k = (c_k, c'_k)$.

La relation (19) ci-dessus, s'écrit alors :

$$\sum_{k \in K} e^{2i\pi(k.\theta)} ((k.\omega) B_k + C_k) = \nu$$

Pour qu'elle se réalise, il suffit de prendre

$$\begin{cases} C_0 = \nu \\ \forall k \in K \setminus \{(0,0)\}, \quad B_k = -\frac{1}{2i\pi(k.\omega)} C_k \end{cases}$$

Contre-exemple dans le cas où la condition (20) n'est pas vérifiée :

Prenons $\omega = (1, 1)$ et $g(\theta) = (\cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2), 0)$

Si $h = (h_1, h_2)$ est une solution alors

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} = \cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2)$$

Posons $\begin{cases} t_1 = \theta_1 - \theta_2 \\ t_2 = \theta_2 \end{cases}$, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \cos 2\pi t_1$$

Ce qui donne :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{h}_1(t_1, t_2) = t_2 \cos 2\pi t_1 + \varphi(t_1)$$

où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , donc :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad h_1(\theta_1, \theta_2) = \theta_2 \cos 2\pi(\theta_1 - \theta_2) + \varphi(\theta_1 - \theta_2)$$

Comme h_1 est 1-périodique par rapport aux variables θ_1, θ_2 , on a par exemple :

$$h_1(1, 0) = h_1(0, -1) = h(0, 0)$$

Or $h_1(1, 0) = \varphi(1)$ et $h_1(0, -1) = -1 + \varphi(1)$, ce qui est absurde.

15b. On a $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + xh(\alpha(t))$, donc $\tilde{\alpha}'(t) = \alpha'(t) + xdh(\alpha(t)).(\alpha'(t))$. Compte tenu de $\alpha'(t) = \omega + xg(\alpha(t))$, il vient :

$$\tilde{\alpha}'(t) = \omega + xg(\alpha(t)) + x(dh(\alpha(t)).\omega + xdh(\alpha(t)).g(\alpha(t)))$$

Comme $dh(\alpha(t)).\omega + g(\alpha(t)) = \nu$, on a :

$$\tilde{\alpha}'(t) = \omega + x\nu + x^2dh(\alpha(t)).g(\alpha(t))$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\alpha}'(t) = \omega + x\nu + x\varepsilon(x, t) \quad (21)$$

avec

$$\varepsilon(x, t) = xdh(\alpha(t)).g(\alpha(t)) \quad (22)$$

On a

$$dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t))) = g_1(\alpha(t))\frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\alpha(t)) + g_2(\alpha(t))\frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\alpha(t))$$

Comme h est 1-périodique par rapport aux arguments θ_1 et θ_2 , ses dérivées partielles le sont aussi et puisqu'elles sont continues, elles sont bornées sur \mathbb{R}^2 . Par ailleurs, g étant périodique continue, elle est bornée sur \mathbb{R}^2 , donc ses composantes g_1 et g_2 aussi. Il en découle que $t \mapsto dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t)))$ est bornée sur \mathbb{R} . Soit $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|dh(\alpha(t)).(g(\alpha(t)))\|$.

De (22) , on déduit :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\| \leq M|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

15c. De (21) ci-dessus on déduit :

$$\tilde{\alpha}(t) = t(\omega + x\nu) + \tilde{\alpha}(0) + x \int_0^t \varepsilon(x, s)ds$$

On a $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(0) + xh(\alpha(0)) = xh(0)$ (on note 0 au lieu de $(0, 0)$.), donc :

$$\tilde{\alpha}(t) = t(\omega + x\nu) + xh(0) + x \int_0^t \varepsilon(x, s)ds$$

Donc

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) - xh(\alpha(t)) = t(\omega + x\nu) + x(h(0) - h(t\omega)) + x \left(h(t\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x, s)ds \right)$$

Soit

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t) - xh(\alpha(t)) = t(\omega + x\nu) + x(h(0) - h(t\omega)) + x\eta(x, t)$$

où

$$\eta(x, t) = h(t\omega) - h(\alpha(t)) + \int_0^t \varepsilon(x, s)ds$$

Soit ψ l'application du compact $[0, 1] \times [0, T]$ vers \mathbb{R}^2 définie par :

$$\forall (t, \tau) \in [0, 1] \times [0, T], \quad \psi(t, \tau) = (1 - \tau)t\omega + \tau\alpha(t)$$

Soit $t_0 \in [0, T]$. Posons $a = t_0\omega$ et $b = \alpha(t_0)$.

Considérons l'application $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$H(\tau) = h((1 - \tau)a + \tau b) = (h \circ \psi)(t_0, \tau)$$

Alors H est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$$H'(\tau) = dh((1 - \tau)a + \tau b).(b - a) = (dh \circ \psi)(t_0, \tau).(b - a)$$

Comme h est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 les applications dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial \theta_1}$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta_2}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 donc bornées sur le compact

$$K = \psi([0, 1] \times [0, T]).$$

Posons

$$M = \left\| \frac{\partial h}{\partial \theta_1} \right\|_{\infty, K} + \left\| \frac{\partial h}{\partial \theta_2} \right\|_{\infty, K}$$

Si on note $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ on a :

$$H'(\tau) = (b_1 - a_1) \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\psi(t_0, \tau)) + (b_2 - a_2) \frac{\partial h}{\partial \theta_2}(\psi(t_0, \tau))$$

de sorte que

$$\|H'(\tau)\| \leq M \|b - a\|$$

où $\|b - a\| = \sup(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|)$.

Il en découle que

$$\|h(b) - h(a)\| = \|H(1) - H(0)\| = \left\| \int_0^1 H'(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^1 \|H'(\tau)\| d\tau \leq M \|b - a\|$$

Puisque $\alpha(0) = 0$, on a (rappelons aussi que $\forall s \in \mathbb{R}, \quad \alpha'(s) = \omega + xg(\alpha(s))$)

$$b - a = \alpha(t_0) - \omega t_0 = [\alpha(s) - \omega s]_0^{t_0} = \int_0^{t_0} (\alpha'(s) - \omega) ds = \int_0^1 xg(\alpha(s)) ds$$

donc

$$\|b - a\| \leq \|g\|_{\infty} |x|$$

Comme t_0 est choisi arbitrairement on a en fin de compte :

$$\forall t \in [0, T], \quad \|h(\alpha(t)) - h(t\omega)\| \leq M \|g\|_{\infty} |x|$$

On a d'autre part

$$\left\| \int_0^t \varepsilon(x, s) ds \right\| \leq T \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\|$$

Donc

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\eta(x, t)\| \leq (M\|g\|_\infty + T) \left(|x| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\| \right)$$

Donc, si on pose

$$M' = M\|g\|_\infty + T \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = |x| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\|$$

on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\eta(x, t)\| \leq M'W(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} W(x) = 0$$

car, en vertu du résultat de la question **15b.** on a $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varepsilon(x, t)\| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\eta(x, t)\| \right) = 0$$