Chap 6

Fonctions Vectorielles à variable réelle

On s'intéressera dans ce chapitre aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un evn de dimension finie.

$$f : I \longrightarrow E$$
$$t \longmapsto f(t) \in E$$

Pensez par exemple aux situations :

$f : I \to \mathbb{R}^n$; $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$f : I \to \mathbb{C}$; $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t) \in \mathbb{C}$

$f : I \to M_2(\mathbb{R})$; $f(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

I) Dérivation

1) Dérivation d'une fonction vectorielle

Déf 1

Soit $f : I \longrightarrow E$, où I intervalle de $\mathbb{R}$ et E un evn de dimension finie.

Pr. ELAMIRI

Soit $a \in E$.

1) On dit que f est dérivable en a si et ssi l'application

$h \longmapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0.

2) Dans ce cas, l se note $f'(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en a. □

$$f'(a) \overset{déf}{=\!=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Prop 2

Soit $f : I \longrightarrow E$, où I intervalle de $\mathbb{R}$ et E un evn de dimension finie.

Soit $a \in E$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est dérivable en a

2) Il existe $l \in E$ et une fonction $\varepsilon : I \to E$ tels que :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + h \cdot l + h \cdot \varepsilon(h) \\ \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{array}}$$

Vocabulaire

Cette expression s'appelle le développement limité de f en a à l'ordre 1.

Corollaire 3

f dérivable en $a \Rightarrow f$ Continue en a.

Démo

Supp que f dérivable en a.

$$\text{Alors } \begin{cases} f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \underbrace{h.l}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} + \underbrace{h.\varepsilon(h)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \\ \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Càd f Continue en a. $\square$

Attention !

La réciproque est en général fausse.

Contre_exemple (très Connu)

$f : x \longmapsto |x|$; f Continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$:

$f'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$, $f'_g(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$ $\square$

Déf 4 (Dérivabilité à droite)

$f : I \longrightarrow E$ et $a \in E$.

1) On dit que f est dérivable à droite en a sict ssi l'application $h \longmapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0^+.

2) Dans ce cas, l se note $f'_d(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé à droite de f en a.

Déf 5 (Dérivabilité à gauche)

$f : I \longrightarrow E$ et $a \in I$.

1) On dit que f est dérivable à gauche en a sict ssi l'application $h \longmapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite $l \in E$ quand h tend vers 0^-.

2) Dans ce cas, l se note $f'_g(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé à gauche de f en a.

Prop 6

$f : I \longrightarrow E$ et a un point intérieur de I.

Les assertions suivantes sont <u>équivalentes</u> :

1) f est dérivable en a

2) $\begin{cases} f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a. \\ \text{et} \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$

Déf 7

$f : I \longrightarrow E$.

1) f est dite dérivable sur I si et ssi elle est dérivable en tout point de I.

2) Supposons que f est dérivable sur I.

L'application $\begin{array}{rl} f' : I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto f'(t) \end{array}$ s'appelle l'application dérivée de f.

2) Lien avec les fonctions composantes

E étant un evn de dimension finie.

Notons $n = \dim(E) \geq 1$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$f : I \longrightarrow E$.

$$f = f_1 e_1 + \dots + f_n e_n = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$$

$f_1, \dots, f_n$ sont les fonctions composantes de f dans la base B

Prop

1) Soit $a \in I$.
f est dérivable en a (resp sur I) si et ssi toutes ses fonctions composantes le sont.

2) Dans ce cas, on a :

i) $$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

ii) $$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x) e_i$$

Démo :

1) Soit $a \in I$.

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$$

$$f(a+h) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a+h) e_i \quad \text{et} \quad f(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) e_i$$

$$\forall h\neq 0,\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h}\cdot e_i$$

D'où :

$$f \text{ dérivable en } a \overset{\text{déf}}{\iff} \left(h\mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ admet une limite } l\in E \text{ quand } h\to 0\right)$$

$$\iff \left(\forall 1\leq i\leq n,\ h\mapsto \frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h} \text{ admet une limite } l_i\in \mathbb{K} \text{ quand } h\to 0\right)$$

$$\iff \left(\forall 1\leq i\leq n,\ f_i \text{ est dérivable en } a\right)\quad \square$$

2) ii)

Et si f est dérivable en a, on aura :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h}\cdot e_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_i(a+h)-f_i(a)}{h}\right)\cdot e_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_i'(a)\, e_i\quad \square$$

On conclut rapidement la dérivabilité sur I ... $\square$

Exemples rapides

1) $f : I \to \mathbb{C}$; $f(t) = \underbrace{Re(f(t))}_{=f_1(t)} + i\,\underbrace{Im(f(t))}_{=f_2(t)}$

On a :

i) f dérivable sur $I \iff Re(f)$ et $Im(f)$ le sont.

ii) Dans ce cas, on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$$

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{i\theta t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\left(e^{i\theta t}\right)' = i\theta . e^{i\theta t}$$

3) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

i) f dérivable sur $I \iff (x_1, \dots, x_n$ le sont $)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

4) $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (sh(t) + t, e^{2t}) \end{array} \right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = (ch\,t + 1, 2e^{2t}) \in \mathbb{R}^2$$

5) $f : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$; $f(t) = \begin{pmatrix} ch\,t & e^{-t} \\ \cos t & t^2 \end{pmatrix}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ses quatre fonctions composantes le sont, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \begin{pmatrix} sh\,t & -e^{-t} \\ -\sin t & 2t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}^2).$$

$\square$

3) Opérations sur les fonctions vectorielles

(Combinaison linéaire)

Prop 1

Soient $f, g : I \to E$ et $a \in I$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) Si f et g sont dérivables en a (resp sur I) alors $(\alpha f + \beta g)$ l'est aussi.

2) Dans ce cas on a :

i) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

ii) $\forall x \in I, \ (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

Démo :

1) i) Supp que f et g sont dérivables en a.

Mq que $(\alpha f + \beta g)$ est dérivable en a, et qu'on a :

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a)}{h} = \alpha \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\to f'(a)} + \beta \underbrace{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}}_{\to g'(a)}$$

Par passage à la limite, on tire que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a)}{h} = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

D'où le résultat voulu. $\square$

Sur I découle de 1)i) et 2)i) $\square$

Notation

$\mathcal{D}(I,E)$: l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E.

Corollaire 2

1) $\mathcal{D}(I,E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I,E)$.

2) L'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(I,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,E) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Prop 3 (Composée)

Soient $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to E$, où I et J intervalles de $\mathbb{R}$.

Supposons que $\begin{pmatrix} g \text{ dérivable sur } I \\ f \text{ dérivable sur } J \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$. On a :

i) $f \circ g$ est dérivable sur I.

ii) $\forall t \in I,\ (f \circ g)'(t) = \underbrace{g'(t)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f'(g(t))}_{\in E}$

Démo :

Supposons que $\begin{pmatrix} g \text{ dérivable sur } I \\ f \text{ dérivable sur } J \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$

Posons $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i$ $\left(\text{alors } f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\, e_i\right)$

On a $(f \circ g)(t) = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g)(t)\, e_i$

Ainsi, $f \circ g$ est dérivable sur I, car ses fonctions composantes $(f_i \circ g)$ le sont, comme composées de f_i et g qui sont dérivables sur I.

En plus, pour tout $t \in I$, on a :

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g)'(t) . e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g'(t) . f_i'(g(t))\, e_i$$

$$= g'(t) . \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i'(g(t))\, e_i}$$

$$= g'(t) . f'(g(t))$$

$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\, e_i$

Prop 4

E et F deux evn de dimensions finies.

Si $\begin{pmatrix} f : I \longrightarrow E \text{ dérivable} \\ L \in \mathcal{L}(E,F) \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} L \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in I,\ (L \circ f)'(t) = L(f'(t)) \end{pmatrix}$

Démo

Soient $f \in \mathcal{D}(I,E)$ et $L \in \mathcal{L}(E,F)$.

M.q. $(L \circ f) \in \mathcal{D}(I,E)$.

Soit alors $a \in I$. M.q. $(L \circ f)$ est dérivable en a et que :

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$$

On a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(L \circ f)(a+h) - (L \circ f)(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{L(f(a+h)) - L(f(a))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} L\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$$

car L est linéaire

Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, car f dérivable en a $(f \in \mathcal{D}(I,E))$

et que L continue sur E comme application linéaire et E de dim finie

D'où

$$\lim_{h\to 0} L\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = L(f'(a))$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(L\circ f)(a+h)-(L\circ f)(a)}{h} = L(f'(a))$$

Exemple 1

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable.

Justifier que $f : t \mapsto tr(A(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(t)$.

Si $\begin{pmatrix} f : I \to E \text{ dérivable} \\ L \in \mathcal{L}(E,F) \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} (L\circ f) \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t\in I,\ (L\circ f)'(t) = L(f'(t)) \end{pmatrix}$

Rappel

Sol

On $\begin{cases} A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dérivable} \\ tr \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{cases}$

D'où leur composée ($tr \circ A = f$) est dérivable sur $\mathbb{R}$

et on a : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = tr(A'(t))}$

$(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$

Exemple 2

Soit $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ dérivable.

Justifier que $f : t \mapsto {}^tA(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et préciser $f'(t)$.

Prop 5 (Produit)

E, F et G trois evn de dimensions finies.

Si
- $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$.
- $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire.

Alors
l'application $B(f,g) : t \in I \mapsto B(f(t), g(t)) \in G$ est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{\forall t \in I,\ (B(f,g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))}$$

Démo

Supp que
- $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$.
- $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire.

Mq que $B(f,g)$ est dérivable sur I.

Soit $t \in I$.

Mq que $B(f,g)$ est dérivable en t, et qu'on a :

$$(B(f,g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

Soit $h \neq 0$. On a :

$$\frac{B(f,g)(t+h) - B(f,g)(t)}{h} = \frac{B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t) + f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t), g(t+h)) + B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))}{h}$$

$$= \frac{B(f(t+h) - f(t), g(t+h)) + B(f(t), g(t+h) - g(t))}{h}$$

$$= \underbrace{B\Big(\underbrace{\frac{f(t+h) - f(t)}{h}}_{\to f'(t)}, \underbrace{g(t+h)}_{\to g(t)}\Big)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} B(f'(t), g(t))} + \underbrace{B\Big(f(t), \underbrace{\frac{g(t+h) - g(t)}{h}}_{\to g'(t)}\Big)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} B(f(t), g'(t))}$$

Car B continue, puisque bilinéaire en dimension finie

Car B continue.

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{B(f,g)(t+h) - B(f,g)(t)}{h} = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

D'où la conclusion. $\square$

Corollaire 6

Si $\left| \begin{array}{l} \alpha \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \\ f \in \mathcal{D}(I, E) \end{array} \right.$

Alors $\left| \begin{array}{l} \alpha f \in \mathcal{D}(I, E) \\ \boxed{\forall t \in I,\ (\alpha \cdot f)'(t) = \alpha'(t) \cdot f(t) + \alpha(t) \cdot f'(t)} \end{array} \right.$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire :

$$B : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(t, x) \longmapsto t \cdot x$$

Corollaire 6

Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une algèbre normée.

Si f et $g \in \mathcal{D}(I, E)$

Alors $\left| \begin{array}{l} f \times g \in \mathcal{D}(I, E) \\ \boxed{\forall t \in I,\ (f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)} \end{array} \right.$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire :

$$B : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x \times y$$

Exemple rapide

Soient A et $B \in \mathcal{D}(I, M_n(\mathbb{R}))$.

L'application $t \longmapsto A(t) \cdot B(t)$ est dérivable sur I, et on a.

$$(A(t) \cdot B(t))' = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$$

Corollaire 7

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Si f et $g \in \mathcal{D}(I, E)$

Alors
$$\langle f, g \rangle : t \longmapsto \langle f(t) | g(t) \rangle \in \mathcal{D}(I, E)$$
$$\boxed{\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle}$$

Démo

D'après la (prop 5) et l'application bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Exemple rapide

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$.

L'application $t \longmapsto \|f(t)\|^2$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\|f(t)\|^2)' = 2 \langle f'(t) | f(t) \rangle$$

4) Dérivées d'ordre supérieures

Les dérivées successives se définissent d'une manière analogue à ce qu'on a vu au Sup pour les fonctions réelles ou complexes.

$D^n(I,E)$: désignera l'ensemble des fonctions n fois dérivable sur I.

$C^n(I,E)$: désignera l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

$C^\infty(I,E)$: désignera l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

N.B :

Les propriétés vues pour les fonctions dérivables valent aussi pour les fonctions de classe C^n, où $n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Prop $n \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

1) f de classe C^n sur I si et ssi toutes ses fonctions composantes le sont.

2) $C^n(I,E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I,E)$.

3) Si $\begin{pmatrix} g \in C^n(I,\mathbb{R}) \\ f \in C^n(J,E) \\ g(I) \subset J \end{pmatrix}$ alors $f \circ g \in C^n(I,E)$

Exemple rapide

$f : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})\ ;\ t \longmapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & e^{-t} \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car ses fonction composantes le sont.

En plus :

$$\forall n \geq 3, \ f^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+n\frac{\pi}{2}) & (-1)^n e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$\square$

Rappels

$$\cos^{(n)}(t) = \cos\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(n)}(t) = \sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} = \lambda^n . e^{\lambda t}$$

I) Intégration

1) Fonctions vectorielles continues par morceaux (CPM)

$B = (e_1, \dots, e_n)$ étant une base de E, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$.

Déf

f est dite continue par morceaux sur I si et ssi toutes ses fonctions composantes le sont.

2) Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

Déf 1

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Soit $[a,b]$ un segment de $[a,b]$.

Soit $f=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right).e_i$$

NB

Cette intégrale ne dépend pas de la base (e_i) choisie.

Prop 2 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f,g CPM sur I à valeurs dans E.

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $a,b\in I$. On a

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$$

Démo

Via les fonctions composantes et la linéarité de l'intégrale des fonctions réelles ou complexes.

Prop 3 (Relation de Chasles)

Soient f CPM sur I à valeurs dans E et $a,b,c \in I$. On a :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Démo

Via les fonctions composantes ...

3) Sommes de Riemann

Prop 1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ CPM. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

NB

On a aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Démo

Via les fonctions composantes de f, et les sommes de Riemann appliquées à celles-ci.

Cas particulier fréquent

Soit $f : [0,1] \to E$ CPM. On a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

NB

On a aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Corollaire 2

Soient $f : I \to E$ CPM et $L \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit $[a,b] \subset I$. On a :

$$\int_a^b L(f(t))\,dt = L\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$$

Démo

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

$$L\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = L\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(L \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

Car L Continue sur E

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} L\left(f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)\right)$$

Car L linéaire

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (L\circ f)\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$= \int_a^b L(f(t))\,dt \qquad \square$$

Corollaire 3 (Inégalité triangulaire)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow E$ CPM et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On a :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

Démo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$\lim_n x_n = l$
$\Downarrow$
$\lim_n \|x_n\| = \|l\|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \right\| = \left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|$$

inég_triang

$$\text{Or } \left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right) \right\| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\| f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

Alors par passage à la limite, on a :

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leqslant \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\| f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right) \right\|}_{= \int_a^b \|f(t)\|\,dt}$$

$\square$

4) Primitives

Déf 1

Soient $f, F \in \mathcal{F}(I,E)$.

F est dite une primitive de f si et ssi :

$$\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ F' = f \end{cases}$$

Propr

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I,E)$. On a :

1) $f' = 0 \Leftrightarrow (\exists C \in E, \forall x \in E, f(x) = C)$

2) $f' = g' \Leftrightarrow (\exists C \in E, \forall x \in E, f(x) = g(x) + C)$

Démo

1) Posons $f=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$. On a :

$f'=0 \iff \sum_{i=1}^{n} f_i' e_i = 0$

$\iff \forall 1\leq i\leq n,\ f_i'=0$

$\iff \forall 1\leq i\leq n,\ \exists C_i\in\mathbb{K},\ f_i=C_i$

$\iff \exists C\in E,\ \sum_{i=1}^{n} f_i e_i = C \quad \left(\text{où } C=\sum_{i=1}^{n} C_i e_i\right)$

$\iff (\exists C\in E,\ f=C)$

2) $f'=g' \iff (f-g)'=0$

$\iff \exists C\in E,\ f-g=C$

$\iff \exists C\in E,\ f=g+C$ $\square$

Corollaire 3

Les primitives d'une fonction CPM diffèrent par une constante.

Exemple rapide

Les primitives de la fonction $t\mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sh}(t) \\ t^2 & -1 \end{pmatrix}$ sont de la forme :

$$F(t)=\begin{pmatrix} \sin t + C_1 & \operatorname{ch} t + C_3 \\ \frac{t^3}{3}+C_2 & -t+C_4 \end{pmatrix};\ \text{où } C_1, C_2, C_3, C_4\in\mathbb{R}.$$

Prop 4

Soient $f \in C(I,E)$ et $a \in I$.

La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démo

Via les fonctions composantes de f, qui sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ et qu'elles sont continues, par suite possède des primitives ... $\square$

Corollaire 5

Si $f \in C(I,E)$ et $a \in I$.

Alors la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de Classe C^1 sur I.

Corollaire 6

Soient $f \in C(I,E)$ et F une primitive de f.

Soient $a, b \in I$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad \left(\text{noté } [F(t)]_a^b\right)$$

Démo

Notons $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

F et G sont deux primitives de f.

$$\Rightarrow (\exists c \in E, \forall x \in I, F(x) = G(x) + c)$$

$$x = a \Rightarrow F(a) = c \quad (\text{car } G(a) = 0)$$

D'où $\left(\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)\right)$

Et $x = b \Rightarrow$ $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$ $\square$

Prop 7

1) Soient $f \in C^1(I,E)$ et $a, b \in I$. On a :

$$\boxed{\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)} \quad \left(= [f(t)]_a^b\right)$$

2) $\boxed{\int_a^b c\,dt = (b-a)\,c}$; où c constante de E.

5) Changement de variable _ Intégration par parties

Prop 1 (Changement de variable)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soient $\begin{cases} \varphi : I \to J \text{ de classe } C^1 \\ f : J \to E \text{ continue} \end{cases}$

$$\forall \alpha, \beta \in I,\ \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f(\varphi(t))\,dt$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$

Démo

Calquée sur celle de sup.

Prop 2 (Intégration par parties)

Soient $f \in C^1(I, E)$ et $g \in C^1(I, F)$.

Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.

Soient $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b B(f', g) = \left[B(f, g)\right]_a^b - \int_a^b B(f, g')$$

Démo

On a $\left(B(f, g)\right)' = B(f', g) + B(f, g')$

$$\Rightarrow \quad B(f', g) = \left(B(f, g)\right)' - B(f, g')$$

$$\Rightarrow \int_a^b B(f', g) = \underbrace{\int_a^b \left(B(f, g)\right)'}_{} - \int_a^b B(f, g')$$

$$= B(f(b), g(b)) - B(f(a), g(a)) = \left[B(f, g)\right]_a^b$$

6) Inégalités des accroissements finis

Prop

Si $\left| \begin{array}{l} f \in C^1(I,E) \\ \exists M \geqslant 0,\ \forall x \in I,\ \|f'(x)\| \leqslant M \end{array} \right.$

Alors $\left(\forall a,b \in I,\ \|f(b)-f(a)\| \leqslant M.|b-a| \right)$

Démo

On a $f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \|f(b)-f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,dt \right\|$$

Cas 1 : Si $a \leq b$

$$\|f(b)-f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,dt \right\|$$

$$\leqslant \int_a^b \underbrace{\|f'(t)\|}_{\leqslant M}\,dt$$

$$\leqslant \int_a^b M\,dt$$

$$= M(b-a)$$

$$= M|b-a|$$

Cas 2 : Si $b < a$

$$\|f(b) - f(a)\| = \|f(a) - f(b)\|$$

$$= \left\| \int_b^a f'(t)\,dt \right\|$$

$$\leq \int_b^a \underbrace{\|f'(t)\|}_{\leq M}\,dt$$

$$\leq \int_b^a M\,dt$$

$$= M(a-b)$$

$$= M|b-a| \quad \square$$

---

7) Formules de Taylor

a) Formule de Taylor avec reste intégrale

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in C^{n+1}(I, E)$

Alors $\left(\forall a, b \in I,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right)$

Démo

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, et via une IPP.

b) Inégalité de Taylor-Lagrange

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $\left| \begin{array}{l} f \in C^{n+1}(I, E) \\ \exists M \geqslant 0,\ \forall t \in I,\ \|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M \end{array} \right.$

Alors $\left(\forall a, b \in I,\ \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$

Démo (En bref)

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right\|$$

Cas 1 : Si $a \leqslant b$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right\|$$

$$\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot \underbrace{\|f^{(n+1)}(t)\|}_{\leqslant M}\, dt \quad \left(\text{inég-triang}\right)$$

$$\leq \frac{M}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,dt$$

$$= \frac{M}{n!}\underbrace{\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b}_{=\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!}|a-b|^{n+1} \quad \square$$

Cas 2 : Si $b < a$

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\| = \left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right\|$$

$$= \left\| \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right\|$$

$$\leq \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\cdot \underbrace{\|f^{(n+1)}(t)\|}_{\leq M}\,dt \quad \left(\text{inég}-\text{triang}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}|b-t| = t-b \\ \text{car } t \geq b\end{array}\right.$$

$$\leq \frac{M}{n!}\int_b^a (t-b)^n\,dt$$

$$= \frac{M}{n!}\underbrace{\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{n+1}\right]_b^a}_{=\frac{(a-b)^{n+1}}{n+1}}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!} (a-b)^{n+1}$$

$$= \frac{M}{(n+1)!} |a-b|^{n+1} \quad \square \qquad (\text{car } a > b)$$

C) Formule de Taylor-Young

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $\left| \begin{array}{l} f \in C^n(I, E) \\ a \in I \end{array} \right.$

Alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$

Fin