Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Nombres Complexes

I) Rappels et Compléments

Tous les nombres qu'on rencontrera sont des nombres complexes.

Rappel 1

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$

Càd :

- $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \times \cdots \times z_n} = \overline{z_1} \times \cdots \times \overline{z_n}$

Càd :

- $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Rappel 2

- $z = Re(z) + i\, Im(z)$
- $Re(z) \in \mathbb{R}$ et $Im(z) \in \mathbb{R}$
- $\overline{z} = Re(z) - i\, Im(z)$
- $|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$
- $z = 0 \iff \left(Re(z) = 0 \text{ et } Im(z) = 0\right)$
- $z \times \overline{z} = |z|^2$

Rappel 3

- $\forall z \in \mathbb{C},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \begin{cases} Re(\alpha z) = \alpha\, Re(z) \\ Im(\alpha z) = \alpha\, Im(z) \end{cases}$
- $Re(z_1 + \dots + z_n) = Re(z_1) + \dots + Re(z_n)$

  C à d

  $$Re\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Re(z_k)$$

- $Im(z_1 + \dots + z_n) = Im(z_1) + \dots + Im(z_n)$

  C à d

  $$Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Im(z_k)$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Rappel 4

- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $$\begin{cases} |z_1 \times \cdots \times z_n| = |z_1| \times \cdots \times |z_n| \\ \text{Càd} \\ \left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k| \end{cases}$$

Rappel 5

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $$\begin{cases} |z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n| \\ \text{Càd} \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \end{cases}$$

(inégalité triangulaire généralisée)

- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Démo en bref

i) $|z - z'| \leq |z| + |z'|$?

$$|z - z'| = |z + (-z')|$$
$$\leq |z| + |-z'|$$
$$= |z| + |z'|$$

ii) $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$?

On utilise le rappel suivant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \geq 0, |x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r}$$

Ainsi, il s'agit de montrer que :

$$-|z - z'| \leq |z| - |z'| \leq |z - z'|$$

Montrons par exemple que $-|z - z'| \leq |z| - |z'|$

On a :

$$-|z - z'| \leq |z| - |z'| \Leftrightarrow |z'| \leq |z - z'| + |z|$$

On a :

$$|z'| = |(z' - z) + z|$$
$$\leq |z' - z| + |z|$$
$$= |z - z'| + |z| \quad \square$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI   Cours disponible sur   www.iamateacher.org

Rappel 6

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ car $\begin{cases} \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$

- $\boxed{\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\sin(\theta) \end{aligned}}$ (Formules d'Euler)

- $\arg(e^{i\theta}) = \theta \; [2\pi]$

- $\forall k \in \mathbb{Z},\; e^{2k\pi i} = 1$ $\left(\text{car} \begin{cases} \cos(2k\pi) = 1 \\ \sin(2k\pi) = 0 \end{cases} \right)$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

  càd

  $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

(Formules de Moivre)

- $\forall k \in \mathbb{Z},\; \cos(k\pi) = (-1)^k$

Brève démonstration

$\cos(k\pi) = Re(e^{ik\pi}) = Re((e^{i\pi})^k) = Re((-1)^k) = (-1)^k$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$\begin{cases} \cos(\theta) = Re(e^{i\theta}) \\ \sin(\theta) = Im(e^{i\theta}) \end{cases}$$

Rappel 7

Écriture exponentielle d'un complexe non nul.

$$\boxed{z = r e^{i\theta}}$$

où $r = |z|$ et $\arg(z) = \theta \, [2\pi]$

Rappel 8

(Nombres complexes de module 1)

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \; |e^{i\theta}| = 1$

$|z| = 1 \iff (\exists \theta \in \mathbb{R}, \; z = e^{i\theta})$

$|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$ (car $z \times \bar{z} = |z|^2$)

Notation

$\mathbb{U}$: désignera l'ensemble des complexes de module 1.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \; / \; |z| = 1 \} \\ z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1 \\ z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z} \\ z \in \mathbb{U} \iff (\exists \theta \in \mathbb{R}, \; z = e^{i\theta}) \end{array}}$$

Rappel 9 (Règles de l'angle-moitié)

$$e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta}-1 = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}$$

$$e^{i\theta}+e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

$$e^{i\theta}-e^{i\theta'} = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

Rappel 10 (Formules d'addition)

$$\cos\theta+\cos\theta' = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\theta' = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\theta' = -2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\theta' = 2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

NB :

Ne comptez pas trop sur vos mémoires ; il faut savoir retrouver ces formules, comme ci-après.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Démo

1)

On a : $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

Alors :

$$\begin{cases} Re\left(e^{i\theta}+e^{i\theta'}\right)=Re\left(2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right) \\ Im\left(e^{i\theta}+e^{i\theta'}\right)=Im\left(2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \cos\theta+\cos\theta'=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) \\ \sin\theta+\sin\theta'=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) \end{array}}$$

2)

On a : $e^{i\theta}-e^{i\theta'}=2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

Alors :

$$\begin{cases} Re\left(e^{i\theta}-e^{i\theta'}\right)=Re\left(2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right) \\ Im\left(e^{i\theta}-e^{i\theta'}\right)=Im\left(2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \cos\theta-\cos\theta'=-2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) \\ \sin\theta-\sin\theta'=2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) \end{array}}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Rappel / 10 Linéarisation de $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ c'est les écrire comme combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$, où $k \in \mathbb{N}$.

Mise en oeuvre

On remplace $\cos x$ par $\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x$ par $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ puis on développe via le binôme de Newton.
On simplifie, puis on conclut enfin via Euler.

Exemples

Linéariser les expressions suivantes :

1) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$
2) $\cos^3 x$, $\sin^3 x$
3) $\cos^4 x$, $\sin^4 x$
4) $\cos x \times \sin^3 x$

Solution

3) $\cos^4 x$:

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
$(n=4)$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}\cdot e^{-ix} + 6e^{2ix}\cdot e^{-2ix} + 4e^{ix}\cdot e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x) + 4\times 2\cos(2x) + 6\right)$$

Enfin, on a la linéarisation suivante :

$$\boxed{\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

4) $\cos x \times \sin^3 x$

$$\cos x \cdot \sin^3 x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{2^3 i^3}$$

$$= \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)}{2^4 i^3}$$

On développe ce produit

$$= \frac{e^{i4x} - e^{-i4x} - 2e^{i2x} + 2e^{-i2x}}{2^4 i^3}$$

$$= \frac{2i\sin(4x) - 2 \times 2i\sin(2x)}{2^4 i^3}$$

$$\boxed{\cos x \cdot \sin^3 x = \frac{-\sin(4x)}{8} + \frac{\sin(2x)}{4}}$$

Application

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$; 3) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$

2) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$

Solution

2) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = ?$

On linéarise, puis c'est fini.

On a après linéarisation : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x\right) dx$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Rappels :

1) Une primitive de $\cos(kx)$ est $\dfrac{\sin(kx)}{k}$; où $k \neq 0$

2) Une primitive de $\sin(kx)$ est $\dfrac{-\cos(kx)}{k}$; où $k \neq 0$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{3}{4} \times \sin x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{12} \sin\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1} + \frac{3}{4} \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

$\sin(0) = 0$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = 2/3$$

Exponentielle d'un nombre Complexe.

Définition

Pour $z = Re(z) + i\,Im(z)$. On a :

$$e^z = e^{Re(z)} \times e^{i\,Im(z)}$$

Notation

e^z se note aussi $\exp(z)$.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) $|e^z| = e^{Re(z)}$

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$ (car $e^z \in \mathbb{C}^*$)

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$

Démo

1) $|e^z| = e^{Re(z)}$?

$$|e^z| = |e^{Re(z)}| \times |e^{i\,Im(z)}|$$

$$= e^{Re(z)} \quad \text{car } e^{Re(z)} > 0 \text{ et } (\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1)$$

2) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$?

On a $|e^z| = e^{Re(z)} > 0$

$$\Rightarrow |e^z| \neq 0$$

$$\Rightarrow e^z \neq 0$$

Attention

1) « $e^x > 0$ » vue au lycée est vraie quand $x \in \mathbb{R}$.

2) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z \in \mathbb{C}$ c'est tout.

Par exemple : $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$e^{z} = 1+i \quad (z \in \mathbb{C})$$

Rappel

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$$

Solution

Posons $z = x + iy$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{z} = 1+i \iff e^{x} \times e^{iy} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Rappel

$$\iff \begin{cases} e^{x} = \sqrt{2} \\ y \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \ln(\sqrt{2}) \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Enfin, en notant S l'ensemble des solutions de cette équation, on a :

$$S = \left\{ \ln(\sqrt{2}) + 2k\pi i \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

II) Racine carrée d'un nombre complexe

1) Définition et exemples

Prop

Soient $a, z \in \mathbb{C}$.

z est dite racine carrée de a si et seulement si :

$$z^2 = a$$

Exemples rapides

a	Les racines carrées de a
9	3 et -3
0	0
-1	i et $-i$
-3	$\sqrt{3}\, i$ et $-\sqrt{3}\, i$
$e^{i\theta}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$)	$e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-e^{i\frac{\theta}{2}}$
i	$e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$ car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Détaillons par exemple la dernière

z est une racine carrée de i $\iff z^2 = i$

$\iff z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\iff z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$

$\iff z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) Détermination pratique des racines carrées

Soit $a = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}^*$.

Voyons comment déterminer ses racines carrées.

On procède de la manière suivante (à retenir).

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^2 = a \iff (x+iy)^2 = \alpha + \beta i$$

$$\iff (x^2 - y^2) + 2xyi = \alpha + \beta i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2xy = \beta \end{cases} \quad (\text{c'est : } |z|^2 = |a|)$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha\right) & (\text{par sommation}) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha\right) & (\text{par soustraction}) \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$z^2 = a \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\star} \\ y = \pm\sqrt{\star} \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

x a 2 valeurs possibles, et y aussi.

Alors $z = x + yi$ a 4 valeurs possibles.

Mais $xy = \frac{\beta}{2}$ indique si $xy \geqslant 0$ ou $xy \leqslant 0$.

Du coup, on saura si x et y ont le même signe ou deux signes contraires.

Enfin, $\boxed{z = x + yi \text{ aura deux valeurs uniquement.}}$

Exercice d'application

1) Déterminer les racines carrées de $(1+i)$.

2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution

1) Déterminer les racines carrées de $(1+i)$.

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^2 = 1 + i \iff (x + yi)^2 = (1+i)$$

$$\iff x^2 - y^2 + 2xy = 1 + i$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2xy = 1 \quad (x \text{ et } y \text{ de même signe}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$$

Les racines carrées de $(1+i)$ sont :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

z est une racine carrée de $(1+i)$ $\Leftrightarrow z^2 = 1+i$

$$\Leftrightarrow z^2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$ (forme exponentielle de $(1+i)$)

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Ainsi, les racines carrées de $(1+i)$ sont $\pm \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$

et sont aussi $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Vu que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Alors : $\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

C.à.d $\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(\pi/8) &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \\ \sin(\pi/8) &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \end{aligned}}$$

$\square$

III) Résolution de l'équation « $az^2+bz+c=0$ »

Ici (E) : $az^2+bz+c=0$

où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

On verra comment résoudre l'équation (E) de second degré à coéfficients complexes.

Notations

1) $\Delta = b^2-4ac$; le discriminant de (E).

2) δ désigne <u>une</u> racine carré complexe de Δ.

On a :

Prop

1) Si $\Delta \neq 0$

(E) possède deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

2) Si $\Delta = 0$

(E) possède une unique solution complexe :

$$z_1 = \frac{-b}{2a}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Démo

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

z est une solution de (E) $\iff az^2+bz+c=0$

$\iff z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$

$\iff \underbrace{z^2+2z\cdot\frac{b}{2a}}+\frac{c}{a}=0$

début d'une identité remarquable

$\iff z^2+2z\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$

$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$

$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{(2a)^2}$

$\boxed{\text{Si } \Delta=0}$

z est une solution de (E) $\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{(2a)^2}$

$\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

$\iff z=\frac{-b}{2a}$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$

z est une solution de $(E) \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$

$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \quad (\text{Car } \Delta = \delta^2)$

$\iff z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$

$\iff z = \frac{-b-\delta}{2a}$ ou $z = \frac{-b+\delta}{2a}$

□

Exercice d'application 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + z + 1 = 0 \quad (E_1)$

2) $z^2 - z + 1 = 0 \quad (E_2)$

3) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \quad (E_3)$

Solution

1) $z^2 + z + 1 = 0 \quad (E_1)$

$\Delta = -3 \neq 0.$

$\Delta = (\sqrt{3}\, i)^2$

$\delta = \sqrt{3}\, i$ est une racine carrée de Δ.

Les deux solutions de l'équation (E_1) sont :

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

---

2) $z^2 - z + 1 = 0 \quad (E_2)$

Pareille à (E_1)

---

3) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \quad (E_3)$

$\Delta = (-2i)^2 - 4(-1+2i) = -4 + 4 - 8i = -8i$

Déterminons une racine carrée δ de Δ.

Posons $\delta = x + yi$; où $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\delta^2 = \Delta \iff (x+yi)^2 = -8i$$

$$\iff x^2 - y^2 + 2xyi = -8i$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

$(x+yi)^2 = -8i$

$\Downarrow$

$|x+yi|^2 = |-8i|$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 2 \\ 2xy = -8 \end{cases}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$$\iff (x,y)=(2,-2) \text{ ou } (x,y)=(-2,2)$$ (car x et y de signes opposés)

$$\iff \delta = 2-2i \text{ ou } \delta = -2+2i .$$

On a besoin d'une racine carrée de Δ.

Prenons par exemple $\delta = 2-2i$.

Alors (E_3) possède deux solutions, z_1 et z_2 définis par :

$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 \quad (E_3)$

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2i-(2-2i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2i+(2-2i)}{2} = 1$$

Les solutions de (E_3) sont :

1 et $(-1+2i)$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=2i \\ xy=-i \end{cases}$

Solution

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases}$

Soit $(x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. On a :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ (4-y)y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ y^2-4y+2=0 \end{cases}$$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $y^2-4y+2=0$:

On trouve que ses solutions sont $(2-\sqrt{2})$ et $(2+\sqrt{2})$.

Ainsi :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ y=2-\sqrt{2} \text{ ou } y=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ y=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}) \text{ ou } (x,y)=(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Les solutions du système $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases}$ sont les couples :

$(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ et $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

2) $\begin{cases} x+y=2i \\ xy=-i \end{cases}$, se résout de même.

$\square$

IV) Racines nèmes d'un nombre complexe

1) Généralités

Déf 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Soient z et $a \in \mathbb{C}$.

On dit que z est une racine nème de a si et seulement si $z^n = a$.

NB :

1) Pour $n=2$, on parle de racine carrée.

2) Pour $n=3$, on parle de racine cubique.

Notation et vocabulaire

1) Une racine nème de 1 s'appelle racine nème de l'unité.

2) $\mathbb{U}_n$ désignera l'ensemble des racines nèmes de l'unité.

À retenir

1) $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^n = 1 \}$

$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$

2) $z \in \mathbb{U}_n \Longleftrightarrow z^n = 1$

$z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow |z| = 1$

3) $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

Exemples express

1) $\mathbb{U}_2 = \{ 1, -1 \}$

2) $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \right\}$

3) $\mathbb{U}_4 = \{ 1, i, -1, -i \}$

Justifier-le.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

2) Les racines nèmes de l'unité

Prop

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$

3) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; 1 \leqslant k \leqslant n \right\}$

Démo

1) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$?

Procédons par double inclusion.

a) $\left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{U}_n$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in \mathbb{U}_n$ car :

$$\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = e^{2k\pi i} = 1$$

b) $\mathbb{U}_n \subset \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Soit $z \in \mathbb{U}_n$.

Montrons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

On a $z \in \mathbb{U}_n \Rightarrow z^n = 1$

$\Rightarrow |z|^n = 1$

$\Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$.

On a $z^n = 1 \Rightarrow e^{in\theta} = 1$

Rappel : $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Avec $z = e^{i\theta}$, on a alors ;

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

$\boxed{\text{CQFD}}$

---

2) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ / \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$?

Procédons par double inclusion.

a) $\left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ / \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\} \subset \mathbb{U}_n$

C'est claire.

b) $\mathbb{U}_n \subset \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ / \ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$

Soit $z \in \mathbb{U}_n$.

Montrons qu'il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.

On a $z \in \mathbb{U}_n \underset{\text{d'après 1)}}{\Longrightarrow} \left(\exists \ell \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2\ell\pi i}{n}}\right)$

La division euclidienne de ℓ par n implique l'existence de $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(\ell = nq + k \ ; \text{avec } 0 \leq k \leq n-1)$$

Ainsi :

$$z = e^{\frac{2\ell\pi i}{n}} \Rightarrow z = e^{\frac{2(nq+k)\pi i}{n}}$$

$$\Rightarrow z = \underbrace{e^{2q\pi i}}_{=1} \times e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

D'où $\boxed{z = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \text{ et que } 0 \leq k \leq n-1}$ $\boxed{\text{CQFD}}$

---

3) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ / \ 1 \leq k \leq n \right\}$?

On a déjà que : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \ / \ 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

Pour $k = 0$, $e^{\frac{2k\pi i}{n}} = 1 = e^{\frac{2n\pi i}{n}}$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

D'où

$$\boxed{\left\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\} = \left\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}}$$

Par suite :

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

$\square$

Exemples express

Retrouver que :

1) $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

2) $\mathbb{U}_3 = \left\{1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

3) $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$

Solution

On rappelle que : $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$

1) $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$?

$$\mathbb{U}_2 = \left\{e^{\frac{2k\pi i}{2}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant 1\right\}$$

$$= \left\{1, e^{\pi i}\right\}$$

$$= \{1, -1\}$$

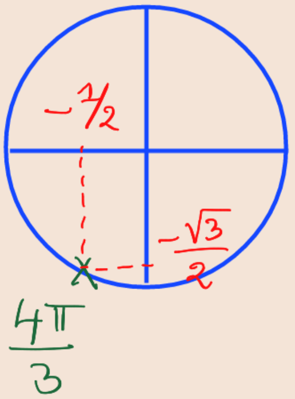
$-1 = e^{\pi i}$

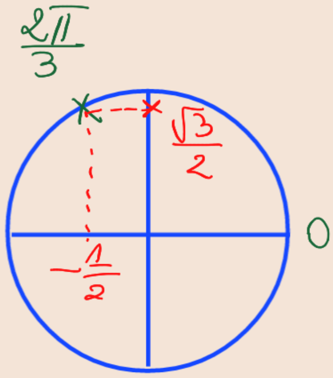
Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

2) $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right\}$?

$$\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{3}} \;/\; 0 \leq k \leq 2 \right\}$$

$$= \left\{ 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}} \right\}$$





$$e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

D'où : $\boxed{\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right\}}$

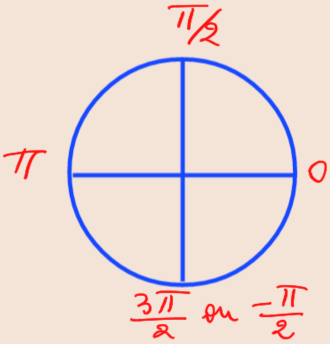
---

3) $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$?

$$\mathbb{U}_4 = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{4}} \;/\; 0 \leq k \leq 3 \right\}$$

$$= \left\{ e^{\frac{k\pi i}{2}} \;/\; 0 \leq k \leq 3 \right\}$$

$$= \left\{ 1, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3\pi}{2}i} \right\}$$



$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} e^{\frac{\pi}{2}i} = i \\ e^{\pi i} = -1 \\ e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i \end{array} \right.$$

D'où ; $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ $\square$

Prop

Soit $n \geqslant 2$.

La somme de toutes les racines $n$ème de l'unité est nulle.

Démo

On a : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \,/\, 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k$$

$$= \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}}$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}}$$

$$\sum_{k=0}^{s} q^k = \frac{1 - q^{s+1}}{1 - q}$$

Si $q \neq 1$

Rappel

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

$= 0$, car $e^{\frac{2\pi i}{n}} = 1$ $\boxed{}$

Exo

Soit $n \geq 1$.

Calculer $\prod_{w \in \mathbb{U}_n} w$; le produit de toutes les racines $n$ièmes de l'unité.

Solution

Voir fiche de TD.

Notation

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

Prop

1) $j^3 = 1$

2) $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3) $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$; les 3 racines cubiques de l'unité.

4) $1 + j + j^2 = 0$

5) $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Démo

1) $j^3 = 1$?

$$j^3 = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3$$

$$= e^{2\pi i}$$

$$= 1$$

2) $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$?

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{= -\frac{1}{2}} + i \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

3) $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$?

$$\mathbb{U}_3 = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{3}} \,/\, 0 \leq k \leq 2 \right\}$$

$$= \left\{ 1, \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{3}}}_{= j}, \underbrace{e^{\frac{4\pi i}{3}}}_{= j^2} \right\}$$

4) $1 + j + j^2 = 0$?

On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, et que la somme de toutes les racines cubiques de l'unité est nulle.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

D'où $1+j+j^2=0$.

5) $j^2=\frac{1}{j}=\bar{j}$?

a) $j^2=\frac{1}{j}$ car $j^2\times j=j^3=1$

b) $\frac{1}{j}=\bar{j}$ car $j\times\bar{j}=|j|^2=1$.

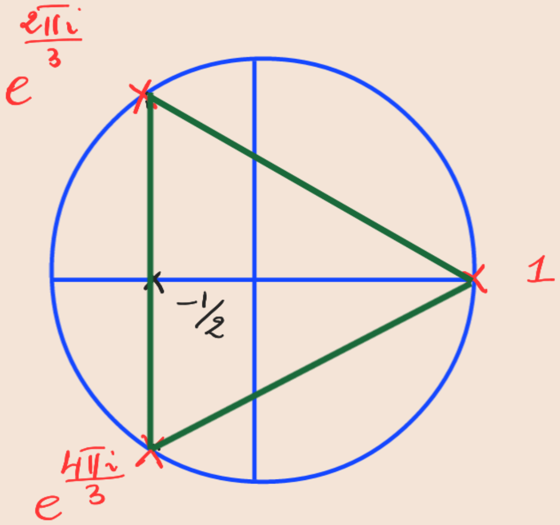
Exo

1) Représentez les racines cubiques de l'unité sur le plan complexe.

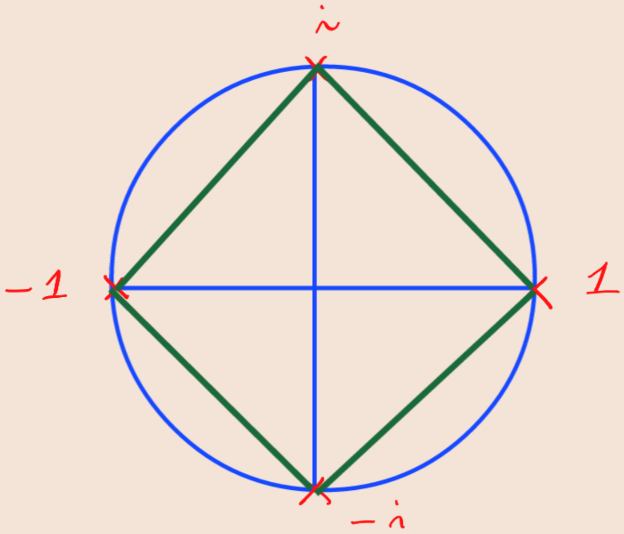
2) Même question pour les racines 4ème de l'unité.

Solution

1)



2)



Remarque

1) Les racines cubiques de l'unité sont les sommets d'un triangle équilatéral.

2) Les racines 4ème de l'unité sont les sommets d'un carré.

En général, on a :

Prop

Soit $n \geq 3$.

Les racines $n$ème de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

3) Racines nèmes d'un complexe non nul

Prop

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

Posons $a = r e^{i\theta}$, son écriture exponentielle.

Les racines nèmes de a sont les complexes de la forme :

$$\boxed{\sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \; ; \text{ où } 0 \leq k \leq n-1}$$

Démo

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^n = a \iff z^n = r e^{i\theta}$$

$$\iff z^n = \left(\sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$$

$$\iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1$$

$$\iff \exists\, 0 \leq k \leq n-1, \quad \frac{z}{\sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta}{n}}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$\iff \exists\, 0 \leq k \leq n-1, \quad z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi i}{n}}$$

$$\iff \exists\, 0 \leq k \leq n-1, \quad z = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Exo

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer toutes les racines nèmes de :

1) -1

2) i

3) $1+i$

Fin

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org