Matrices
Résumé

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités

La matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$:

Elle se note I_n, et est définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déf (Matrice diagonale)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

A est dite matrice diagonale si et ssi :

$$\forall\, i \neq j,\ a_{ij} = 0$$

Illustration :

Une matrice diagonale est de la forme :

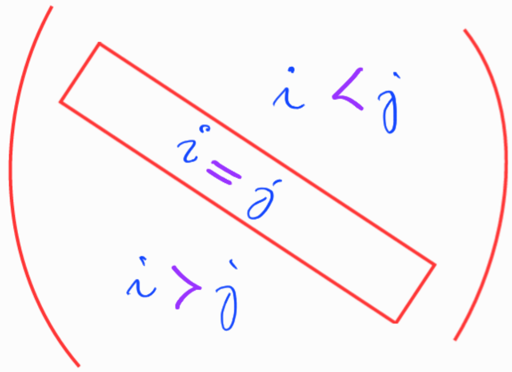
$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notation :

D se note :

$$D = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

Schéma (à retenir)



Déf (Matrice triangulaire supérieure)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est dite matrice **triangulaire supérieure** si et ssi :

$$\forall\, i > j,\ a_{ij} = 0$$

Illustration :

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Déf (Matrice triangulaire inférieure)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est dite matrice **triangulaire inférieure** si et ssi :

$$\forall\, i < j,\ a_{ij} = 0$$

Illustration :

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notation : (Matrices élémentaires)

Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$.

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i^{\text{ème}}\ \text{ligne} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j^{\text{ème}}\ \text{colonne} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Structure de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

a) Opérations sur $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

i) Somme

Soient $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$

deux matrices de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Leur somme est la matrice :

$$A+B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

À retenir : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}}$

ii) Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soient $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\boxed{\lambda . A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}}$$

À retenir : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda A)_{ij} = \lambda . A_{ij}}$

Propriétés immédiates :

Soient $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

1) $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ (\lambda A + \mu B)_{ij} = \lambda . A_{ij} + \mu . B_{ij}$

2) $A + B = B + A$

3) $A + O_{mn} = A$; O_{mn} étant la matrice nulle de $M_{mn}(\mathbb{K})$.

4) $(A+B)+C = A+(B+C)$

Démo : en exo.

b) Structure de $M_{mn}(\mathbb{K})$

Prop 1 :

$(M_{mn}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de neutre O_{mn}.

Prop :

La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ est une base de l'espace $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Elle est dite la base Canonique.

NB: $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Corollaire :

1) $M_{mn}(\mathbb{K})$ est un ev de dimension finie, et on a :

$$\dim(M_{mn}(\mathbb{K}))=mn$$

2) $\dim(M_n(\mathbb{K}))=n^2$

À retenir :

1) Si $A=(A_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\in M_{mn}(\mathbb{K})$, on a $A=\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} A_{ij}\,E_{ij}$

2) Si $A=(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(\mathbb{K})$, on a $A=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}\,E_{ij}$

3) Produit matriciel

p, m et $n\in\mathbb{N}^*$ fixés.

Définition :

Soient $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in M_{np}(\mathbb{K})$.

Le produit AB est la matrice $C=(C_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq p}}\in M_{mp}(\mathbb{K})$

définie par :

$$\forall (i,j)\in [\![1,m]\!]\times[\![1,p]\!],\ C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}$$

NB 1 :

$$\underset{(m\times n)}{A}\cdot\underset{(n\times p)}{B}=\underset{(m\times p)}{C}$$

NB :

Le coéfficient C_{ij} du produit $C=AB$ est $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}$;

ça provient de la <u>ième ligne</u> de A et la <u>jème colonne</u> de B.

Voir l'exemple illustratif suivant :

Notation :

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$; où $n\in\mathbb{N}^*$.

1) $A^0=I_n$ (par convention)

2) Pour $k\geq 1$, $A^k=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{k\text{ fois}}$

Définition :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) A est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

2) Soit A une matrice nilpotente.
Le premier entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A.

NB :

Si A est nilpotente d'indice p, on a : $\begin{cases} A^p = 0 \\ A^{p-1} \neq 0 \end{cases}$

Réflexe à avoir :

A et B étant deux matrices. On a

$$A = B \iff (\forall i,j,\ A_{ij} = B_{ij})$$

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot B_{kj}$$

Prop :

I_n étant la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Proposition :

A, B et C étant des matrices. On a :

1) $A \cdot O = O$ et $O \cdot A = O$

2) $A \cdot I_n = A$

3) $I_n \cdot A = A$

4) $(\alpha A + \beta B) C = \alpha . AC + \beta . BC$

5) $A . (\alpha B + \beta C) = \alpha . AB + \beta . AC$

« Sous réserve d'existence des produits »

Attention :

L'implication suivante est en général fausse :

$$AB = 0 \Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$

Prop :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau de neutre I_n.

2) L'anneau $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ n'est <u>ni commutatif</u> <u>ni intègre</u> si $n \geq 2$.

3) La matrice (λI_n) commute avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Prop :

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On a :

1) $\forall p \in \mathbb{N}, \ (AB)^p = A^p . B^p$

2) $\forall p \in \mathbb{N}, \ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$ (Binôme de Newton)

3) $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p - B^p = (A-B) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$ (Identité de Bernoulli)

Cas particuliers fréquents

1) $A^p - I_n = (A - I_n) \cdot \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ (cas A et I_n commutent)

2) $(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k$ (cas A et I_n commutent)

3) $(A + \lambda I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \lambda^{p-k} A^k$ (cas A et (λI_n) commutent)

Matrices inversibles

Déf :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) A est dite inversible si et seulement si :

$$\exists B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } \begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}$$

2) Dans ce cas, B s'appelle l'inverse de A et se note A^{-1}.

Prop :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible.

ii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$

iii) $\exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$

2) Dans ce cas, $A^{-1} = B$

Prop :

1) I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, (λI_n) est inversible et $(\lambda I_n)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot I_n$

3) Le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible, et on a : $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4) Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi, et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Notation et vocabulaire :

1) $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

2) Il s'appelle le groupe linéaire d'ordre n.

D'où :

Corollaire :

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe de neutre I_n.

NB : Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ n'est pas commutatif pour $n \geq 2$.

Propriétés des matrices triangulaires

Vocabulaire :

Une matrice est dite triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Prop

1) Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

2) On a précisément :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Prop

1) i) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

ii) On a précisément :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

2) i) Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

ii) On a précisément :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Prop

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. On a :

1) D inversible $\Leftrightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Prop

1) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coéfficients diagonaux sont non nuls.

2) Dans ce cas, on a :

i) $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

ii) $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice

Déf :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

La transposée de A est la matrice de $M_{nm}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$, et définie par :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!],\ ({}^tA)_{kl} = A_{lk}$$

Résumé :

1) Si $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in M_{nm}(\mathbb{K})$.

2) $\forall i,j,\ ({}^tA)_{ij} = A_{ji}$

Remarque pratique :

Pour une matrice et sa transposée :

1) Les lignes de l'une sont les colonnes de l'autre.
2) La ième ligne de l'une est égale à la ième colonne de l'autre

Prop :

A et B étant deux matrices et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

1) ${}^t(O_{mn}) = O_{nm}$ et ${}^t(O_n) = O_n$

2) ${}^t(I_n) = I_n$

3) ${}^t({}^tA) = A$

4) ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda . {}^tA + \mu . {}^tB$

5) ${}^t(AB) = {}^tB . {}^tA$ (attention ! l'ordre est inversé)

Corollaire :

1) L'application $\left|\begin{array}{l} \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}) \\ A \longmapsto {}^tA \end{array}\right.$ est linéaire.

2) L'application $\left|\begin{array}{l} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ A \longmapsto {}^tA \end{array}\right.$ est un endomorphisme.

Prop :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

1) A est inversible $\Longleftrightarrow$ ${}^tA$ est inversible

2) Dans ce cas, on a :

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Prop :

1) $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$

2) ${}^t(E_{ij}) = E_{ji}$

⚠ 3) $E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} \cdot E_{il}$

II) Matrice d'une application linéaire dans deux bases

1) Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

E sera ici un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ en est une base.

Déf :

Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.

La matrice de x dans la base B est :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Prop :

Soient x et $y \in E$ et B une base de E. On a :

1) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0$

2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(x) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(y) \iff x = y$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\underset{B}{\mathrm{mat}}(\alpha x + \beta y) = \alpha \underset{B}{\mathrm{mat}}(x) + \beta \underset{B}{\mathrm{mat}}(y)$.

Déf (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base B, notée $\underset{B}{\mathrm{mat}}(\mathcal{F})$, est la matrice définie par :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

où $\underset{B}{\mathrm{mat}}(u_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, pour tout $1 \leq j \leq p$.

Autrement dit :

La jème colonne de $\underset{B}{\mathrm{mat}}(\mathcal{F})$ contient les coordonnées du jème vecteur u_j de la famille $\mathcal{F}$.

Prop :

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(B)=I_n$$

2) Matrice d'une application linéaire

Déf :

E et F deux $\mathbb{K}$-esp vect de dimensions finies respectives m et n.

Soient $B=(e_1,\dots,e_m)$ et $S=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ deux bases respectives de E et F.

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

La matrice de f dans les bases B et S est la matrice notée $\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)$ et définie par :

$$\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)=\underset{S}{\mathrm{mat}}(f(B))$$

Autrement écrit :

$$\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)=\underset{S}{\mathrm{mat}}(f(e_1),\dots,f(e_m))$$

Résumé :

$B=(e_1,\dots,e_m)$, $S=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

2) $$\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)=\begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}$$

où $\boxed{f(e_j)=a_{1j}\,\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\,\varepsilon_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,\varepsilon_i}$, pour tout $j\in[\![1,m]\!]$.

3) Pour remplir $\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)$, On met dans la $j$ème colonne les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base S ; où e_j le $j$ème vecteur de B.

Notation :

Si $f\in\mathcal{L}(E)$ et B une base de E.

$\underset{B,B}{\mathrm{mat}}(f)$ se note simplement $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$.

Prop :

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n\geq 1$, et B une base de E . On a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(I_E)=I_n$$

Corollaire :

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E. On a :

1) $f = 0 \iff \underset{B}{\text{mat}}(f) = 0$

2) $f = g \iff \underset{B}{\text{mat}}(f) = \underset{B}{\text{mat}}(g)$

Corollaire :

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E. On a :

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \underset{B}{\text{mat}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \underset{B}{\text{mat}}(f) + \beta \underset{B}{\text{mat}}(g)}$$

Corollaire :

Supposons que $\begin{cases} \dim(E) = m \geq 1 \\ \dim(F) = n \geq 1 \end{cases}$.

Soient B et S deux bases respectives de E et F.

1) L'application suivante est un isomorphisme :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \underset{B,S}{\text{mat}}(f) \end{array}$$

2) $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

$\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie et on a :

$$\boxed{\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2}$$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soient B et S deux bases respectives de E et F. On a :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \underset{S}{\mathrm{mat}}(f(x)) = \underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f) \cdot \underset{B}{\mathrm{mat}}(x)}$$

Corollaire

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E. On a :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \underset{B}{\mathrm{mat}}(f(x)) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \cdot \underset{B}{\mathrm{mat}}(x)}$$

3) Matrice de la composée de deux applications linéaires

Schéma 1 : (Pour la prop 1)

$$\begin{tikzcd}
(E_1, B_1) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & (E_2, B_2) \arrow[r, "g"] & (E_3, B_3)
\end{tikzcd}$$

Prop 1 :

Soient $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$.

Soient B_1, B_2 et B_3 des bases de E_1, E_2 et E_3 respectivement.

On a :

$$\underset{B_1,B_3}{\mathrm{mat}}(g \circ f) = \underset{B_2,B_3}{\mathrm{mat}}(g) \cdot \underset{B_1,B_2}{\mathrm{mat}}(f)$$

NB :

À savoir retrouver via le schéma 1

Schéma 2 : (Pour le Coroll 2)

$$\begin{tikzcd}
(E, B_1) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & (E, B_2) \arrow[r, "g"] & (E, B_3)
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

Soient B_1, B_2 et B_3 des bases de E,

On a :

$$\underset{B_1, B_3}{\mathrm{mat}}(g \circ f) = \underset{B_2, B_3}{\mathrm{mat}}(g) \cdot \underset{B_1, B_2}{\mathrm{mat}}(f)$$

NB :

À savoir retrouver via le schéma 2.

Corollaire 3

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

Soit B une base de E,

On a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(g \circ f) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(g) \cdot \underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$$

Corollaire 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E,

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \underset{B}{\mathrm{mat}}(f^n) = \left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)^n$$

Proposition 5

E et F deux $\mathbb{K}$-esp vect de même dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient B et S deux bases respectives de E et F.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

1) f bijective $\Longleftrightarrow$ $\underset{B,S}{\text{mat}}(f)$ inversible

2) Dans ce cas, on a :

$$\left(\underset{B,S}{\text{mat}}(f)\right)^{-1} = \underset{S,B}{\text{mat}}(f^{-1})$$

Corollaire 6

E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient B et S deux bases de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1) f inversible $\Longleftrightarrow$ $\underset{B,S}{\text{mat}}(f)$ inversible

2) Dans ce cas, on a :

$$\left(\underset{B,S}{\text{mat}}(f)\right)^{-1} = \underset{S,B}{\text{mat}}(f^{-1})$$

Corollaire 7

E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit B une base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1) f inversible $\iff \underset{B}{mat}(f)$ inversible

2) Dans ce cas, on a :

$$\left(\underset{B}{mat}(f)\right)^{-1} = \underset{B}{mat}(f^{-1})$$

4) Matrice de passage d'une base à une base.

Définition 1

E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Soient B et S deux bases de E.

La matrice de passage de la base B à la base S, est la matrice notée $P_{B,S}$ et définie par :

$$P_{B,S} = \underset{B}{mat}(S)$$

NB : $P_{B,S}$ se note aussi P_B^S

Prop 2

E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Soient B et S deux bases de E.

1) $P_{B,S} = \underset{S,B}{mat}(I_E)$

2) $P_{B,S}$ est inversible, et on a :

$$P_{B,S}^{-1} = P_{S,B}$$

Prop 3

E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On a :

$$\forall x \in E, \ \underset{\mathcal{B}_1}{\mathrm{mat}}(x) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \times \underset{\mathcal{B}_2}{\mathrm{mat}}(x)$$

Prop 4

Soient $\mathcal{B}$ et S deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = P_{\mathcal{B},S} \times \underset{S}{\mathrm{mat}}(f) \times P_{S,\mathcal{B}}$$

NB :

Voici deux situations fréquentes à savoir régler à partir de la proposition 4. Voir le Corollaire suivant :

Corollaire 5

Soient $\mathcal{B}$ et S deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = Q \times \underset{S}{\mathrm{mat}}(f) \times Q^{-1}$

où $Q = P_{\mathcal{B},S}$

2) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = R^{-1} \times \underset{S}{\mathrm{mat}}(f) \times R$

où $R = P_{S,\mathcal{B}}$

5) Application linéaire Canoniquement associée à une matrice

Déf 1 :

Soient m et $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

L'application linéaire Canoniquement associée à A est

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ telle que $\underset{B_1, B_2}{mat}(f) = A$, où B_1 et B_2 les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ respectivement.

Déf 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

L'endomorphisme Canoniquement associé à A est $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $\underset{B}{mat}(f) = A$; où B est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 3

Soient m et $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'application linéaire Canoniquement associée à A.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{K}^m$. On a :

1) $f(x) = 0_{\mathbb{K}^m} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $f(x) = y \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

6) Noyau et image d'une matrice

Définition 1

Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

1) Le noyau de A :

$$\ker(A) = \{ X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \,/\, AX = 0 \}$$

2) L'image de A :

$$Im(A) = \{ AX \,/\, X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \}$$

Proposition 2

Soient $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

1) i) $\ker(A)$ est un sev de $M_{n1}(\mathbb{K})$.

ii) $Im(A)$ est un sev de $M_{m1}(\mathbb{K})$.

2) i) $(x_1, \dots, x_n) \in \ker(f) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A)$

ii) $(y_1, \dots, y_m) \in Im(f) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in Im(A)$

3) $\ker(A) = \{0\} \iff (\forall X \in M_{n1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0)$

4) i) $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(f))$

ii) $\dim(Im(A)) = \dim(Im(f))$

Corollaire 3 (Théorème du rang matriciel)

Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$. On a

$$n = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$$

$n \longrightarrow$ nombre de colonnes de A

Proposition 4

Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, et $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n1}(\mathbb{K})$; $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ ième place.

1) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $C_i = A E_i$

2) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_n)$

R/R :

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_n)$ analogue à $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

7) Rang d'une matrice

Définition 1

Soit $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

Le rang de A est noté $\mathrm{rg}(A)$ et est défini par :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

Proposition 2

Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. On a :

$$rg(A) = rg(C_1, \dots, C_n)$$

Proposition 3

1) Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans des bases quelconques.

2) Le rang d'une matrice est égal à celui de son application linéaire canoniquement associée.

3) Le rang d'une famille de vecteurs est égal à celui de sa matrice dans une base quelconque.

Autrement écrit (Réflexes à avoir)

1) i) $rg(f) = rg\left(\underset{B_1, B_2}{mat}(f)\right)$

ii) Si $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$rg(f) = rg\left(\underset{B}{mat}(f)\right)$$

2) i) Si $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$rg(A) = rg(f)$; où f l'applic lin can associé à A.

ii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$rg(A) = rg(f)$; où f l'endomorph can associé à A

3) $rg(x_1, \dots, x_p) = rg\left(\underset{B}{mat}(x_1, \dots, x_p)\right)$

Proposition 4

Le rang d'une matrice est inchangé si on multiplie à gauche ou à droite par une matrice inversible.

Autrement dit

1) $rg(A) = rg(AQ)$, si Q matrice inversible.

2) $rg(A) = rg(PA)$, si P matrice inversible.

3) $rg(A) = rg(PAQ)$, si P et Q matrices inversibles.

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A inversible.
2) $\ker(A) = \{0\}$
3) $Im(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
4) $rg(A) = n$
5) Les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

8) Opérations élémentaires sur les lignes (OPEL)

Opérations élémentaires sur les colonnes (OPEC)

a) OPEL

Il y a trois types d'OPEL pour une matrice.

a)1) $L_i \longleftrightarrow L_j$ (où $i \neq j$)

C'est la permutation de la ligne L_i avec la ligne L_j.

a)2) $L_i \leftarrow \lambda . L_i$ (où $\lambda \neq 0$)

C'est la multiplication de la ligne L_i par λ.

a)3) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (où $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$)

On multiplie la ligne L_j par λ. Le résultat est ajouté à la ligne L_i.

Résumé :

Il y a trois types d'OPEL :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$$

où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

b) OPEC

Il y a trois types d'OPEC pour une matrice.

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

$$C_i \longleftarrow \lambda C_i$$

$$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$$

où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Elles se définissent d'une manière analogue aux OPEL.

9) Matrices élémentaires

Il y a trois types de matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

9)1) Matrices de permutations

C'est toute matrice P_{ij} de $M_n(\mathbb{K})$, obtenue à partir de I_n avec l'OPEL $L_i \longleftrightarrow L_j$.

Autrement dit :

$$P_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} &&& i & & j & && \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

9)2) Matrices de dilatation

C'est toute matrice $D_i(\lambda)$ de $M_n(\mathbb{K})$, obtenue à partir de I_n avec l'OPEL $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.

Autrement dit

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\underset{\substack{\downarrow \\ i\text{ème place}}}{\lambda},1,\dots,1)$$

9) 3) Matrices de transvection

C'est toute matrice $T_{ij}(\lambda)$ de $M_n(\mathbb{K})$, obtenue à partir de I_n avec l'OPEL $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. (avec $i \neq j$)

Autrement dit

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{avec } i \neq j)$$

NB

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \quad ; (\text{avec } i \neq j)$$

Proposition

1) Les trois types de matrices élémentaires sont inversibles.

2) $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

3) $\left(D_i(\lambda)\right)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$

4) $\left(T_{ij}(\lambda)\right)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

c.à.d $\left(I_n + \lambda E_{ij}\right)^{-1} = I_n - \lambda E_{ij}$

10) Lien entre les OPEL (OPEC) et les matrices élémentaires

Proposition 1

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \neq j \in [\![1,n]\!]$.

1) L'OPEL $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice de permutation P_{ij}.

2) L'OPEL $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$.

3) L'OPEL $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$.

On a de même pour les OPEC :

Proposition 2

1) $C_i \leftrightarrow C_j$ équivalent à $A P_{ij}$

2) $C_i \leftarrow \lambda C_i$ équivalent à $A D_i(\lambda)$

3) $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ équivalent à $A T_{ji}(\lambda)$

Corollaire 3

Les OPEL et les OPEC n'affectent pas le rang d'une matrice.

11) Applications des OPEL et OPEC

a) Calcul du rang d'une matrice (Méthode de Gauss)

Exemple 1

Calculons $rg(A)$; où $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dit pivot non nul

étape suivante

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \longleftarrow ? \\ L_3 \longleftarrow ? \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

nouveau pivot non nul

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \; L_3 \longleftarrow ?$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \; L_3 \longleftarrow 2L_3 + 5L_2$$

NB:

Le rang est inchangé par OPEL

Ainsi :

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

On a 3 pivots non nuls

Vocabulaire : A est échelonnée

Règle pratique (à retenir)

Une fois une matrice est échelonnée, son rang est égal au nombre de pivots non nuls.

Suite de l'exemple :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 3$$

Remarque importante

Maintenant qu'on a une méthode pratique pour calculer le rang d'une matrice, on peut donc calculer le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une application linéaire ou endomorphisme. Ceci est via :

$\longrightarrow \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(u_1, \dots, u_p)\right)$

$\longrightarrow \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\underset{B,S}{\mathrm{mat}}(f)\right)$ si $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$\longrightarrow \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)$ si $f \in \mathcal{L}(E)$

Principe de la méthode

On dispose d'une matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

On veut calculer son inverse A^{-1}.

La méthode de Gauss–Jordan consiste à transformer A en I_n via des OPEL.

On applique ces mêmes OPEL à I_n.

Quand A se transforme en I_n, la matrice I_n prise se transforme en A^{-1}.

Exemple 1

Déterminons M^{-1}, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_2}$$

pivot non nul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

↳ sa partie inférieure est nulle.

On passe à annuler sa partie supérieure via des OPEL.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3$$

pivot non nul

↳ Cette matrice est diagonale.

On la transforme facilement en I_3.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{C'est } I_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\text{Ça doit être } M^{-1}} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \end{matrix}$$

Enfin :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III) Matrices équivalentes – Matrices semblables

a) Généralités

Définition 1

Soient A et $B \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

On dit que A est équivalente à B si et seulement si :

$$\exists (P, Q) \in GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}),\ A = PBQ$$

Définition 2

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est semblable à B si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = P^{-1} . B . P$$

NB

1) « A est équivalente à B » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $M_{mn}(\mathbb{K})$

2) « A est semblable à B » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$

3) Dans $M_n(\mathbb{K})$, on a :

a) $(A \text{ et } B \text{ semblables}) \Longrightarrow (A \text{ et } B \text{ equivalentes})$

b) La réciproque est en générale fausse.

(voir plus loin)

Prop 3

Soient A et $B \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A et B sont équivalentes

2) Il existent deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m, deux bases S_1 et S_2 de E, deux bases S_1' et S_2' de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que :

$$A = \operatorname{mat}_{S_1, S_1'}(f) \text{ et } B = \operatorname{mat}_{S_2, S_2'}(f)$$

Autrement dit

Deux matrices sont équivalentes si et ssi elles sont les matrices d'une même application linéaire, relativement à deux couples de bases.

Proposition 4

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{K})$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A et B sont semblables.
2) Il existe un espace vectoriel E de dimension n, deux bases S_1 et S_2 de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$A = \underset{S_1}{\mathrm{mat}}(f) \text{ et } B = \underset{S_2}{\mathrm{mat}}(f)$$

Autrement dit

Deux matrices sont semblables si et ssi elles sont les matrices d'un même endomorphisme, relativement à deux bases.

b) Matrice par blocs

D'une manière générale, une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ peut s'écrire par blocs de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

où A_1, A_2, A_3 et A_4 des matrices.

Et d'une manière plus générale :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des matrices.

b)2) Calcul par blocs

b)2)1) Combinaison linéaire

$$\lambda\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) + \mu\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda A_1 + \mu B_1 & \lambda A_2 + \mu B_2 \\ \hline \lambda A_3 + \mu B_3 & \lambda A_4 + \mu B_4 \end{array}\right)$$

Qu'on généralise :

$$\lambda\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{s1} & \cdots & A'_{st} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \lambda' A'_{11} & \cdots & \lambda A_{1t} + \lambda' A'_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} + \lambda' A'_{s1} & \cdots & \lambda A_{st} + \lambda' A'_{st} \end{pmatrix}$$

b)2)2) Produit par blocs

Se fait d'une manière ordinaire :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)$$

Qu'on peut encore généraliser :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{s1} & \cdots & A'_{st} \end{pmatrix} = \cdots$$

c) Lien entre équivalence et rang

Prop 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r.

Il existe une base e de E et une base f de F telles que

$$\underset{e,f}{\mathrm{mat}}(u) = J_r$$

où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

À retenir : $\boxed{rg(J_r) = r}$

Corollaire 2

Soient A et $B \in M_{mn}(\mathbb{K})$.

1) $rg(A) = r \iff (A$ équivalente à $J_r)$

où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

2) $(A$ et B équivalentes$) \iff rg(A) = rg(B)$

3) $rg(A) = rg({}^tA)$

4) Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes.

Déf 1

Soit $A = (A_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{np}(\mathbb{K})$.

On appelle matrice extraite de A toute matrice de la forme $(A_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$; où $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

Vocabulaire

Si $Card(I) = card(J)$, on dit que $(A_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$ est une matrice carrée extraite de A.

Prop 2

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$.

$rg(A) = r$ <u>si et seulement si</u> les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Il existe une matrice carrée extraite de A, d'ordre r et inversible.

2) Toute matrice carrée extraite de A, d'ordre supérieur strictement à r, n'est pas inversible.

Autrement dit

Le rang de A est l'ordre maximum d'une matrice carrée extraite de A et inversible.

Réflexes

Soit $B \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice carrée extraite de A.
Notons $rg(A) = r$.

1) $p > r \Rightarrow B$ n'est pas inversible

⚠ 2) Si B est inversible alors $rg(A) \geq p$

IV) Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

a) Trace d'une matrice

Définition 1

Soit $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$.

1) La trace de A est la somme de ses coéfficients diagonaux.

2) On la note $tr(A)$ ou $Tr(A)$.

Bref : $\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}}$

Prop 2

1) tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

2) $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $tr(A) = tr({}^tA)$

3) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $tr(AB) = tr(BA)$

4) Deux matrices semblables ont la même trace.

NB

Démonstrations à savoir faire !

b) Trace d'un endomorphisme

Prop 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie.

Si B et B' sont deux bases de E, alors :

$$tr\left(\underset{B}{mat}(f)\right) = tr\left(\underset{B'}{mat}(f)\right)$$

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie.

On appelle trace de f, la trace de sa matrice dans une base (qque) de E.

On la note $tr(f)$ ou $Tr(f)$.

Bref $tr(f) = tr\left(\underset{B}{mat}(f)\right)$

Prop 3

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie.

1) tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

2) $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $tr(f \circ g) = tr(g \circ f)$.

Prop 4

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie.

La trace d'un projecteur de E est égale à son rang.

Autrement dit

Soit p un projecteur de E. On a :

$$\boxed{tr(p) = rg(p)}$$

Fin