Correction

d'après ESIEE Amiens 1997

Partie I

1. $(.|.)$ est clairement un forme bilinéaire symétrique.

Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P(t)^2\mathrm{d}t\geq 0$ et si $(P\mid P)=0$ alors la fonction $t\mapsto P(t)^2$ est nulle car continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Par suite P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines.

2. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. $L(\lambda P+\mu Q)=\lambda L(P)+\mu L(Q)$ notamment par linéarité de la dérivation. De plus $L:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ donc L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3.a La linéarité de L_n provient de celle de L. Le problème est de justifier que L_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\leq\deg P-1\leq n-1$ donc $\deg\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)\leq 2+n-1=n+1$ puis $\deg L_n(P)\leq n$. Ainsi $L_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

3.b $L_n(1)=0$, $L_n(X)=(X^2-1)'=2X$, $L_n(X^p)=\left(p(X^2-1)X^{p-1}\right)'=p(p+1)X^p-p(p-1)X^{p-2}$.

3.c $$\mathrm{Mat}_{(1,X,\dots,X^n)}L_n=\begin{pmatrix}0&0&2&&\text{\Large 0}\\&2&0&\ddots&\\&&6&\ddots&n(n-1)\\&&&\ddots&0\\\text{\Large 0}&&&&n(n+1)\end{pmatrix}.$$

4. $$(L(P)\mid Q)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)Q(x)\mathrm{d}x\underset{\text{ipp}}{=}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$$

donc $(L(P)\mid Q)=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$

or la symétrie de cette formule en P et Q permet de conclure $(L(P)\mid Q)=(P\mid L(Q))$.

Partie II

1.a $P_1=X$, $P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

1.b $\deg U_n=2n$ donc $\deg P_n=\deg U_n-n=n$.

Le terme en x^n de P_n provient de la dérivation à l'ordre n du terme $\frac{1}{2^n n!}x^{2n}$ donc $a_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1.c La famille $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est de degrés étagés (i.e. $\deg P_i=i$) c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $$P_n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((x-1)^n\right)^{(k)}\left((x+1)\right)^{(n-k)}=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$$

donc $P_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k$.

$P_n(1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 2^n=1$ et $P_n(-1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(-2)^n=(-1)^n$.

3.a $\left((x^2-1)^{n+1}\right)'=(n+1)\times 2x\times(x^2-1)^n=2(n+1)xU_n(x)$.

$(x^2-1)((x^2-1)^n)'=n\times 2x\times(x^2-1)^n=2nxU_n(x)$.

3.b En dérivant $n+1$ fois la relation (1), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(U_{n+1}(x)\big)\right)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(2(n+1)xU_n(x)\big)=2(n+1)\binom{n+1}{0}x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(U_n(x)\big)+2\binom{n+1}{1}(n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(U_n(x)\big)$$

donc $2^{n+1}(n+1)!P_{n+1}'(x)=2(n+1)x2^n n!P_n'(x)+2(n+1)^2 2^n n!P_n(x)$

puis $P_{n+1}'(x)=xP_n'(x)+(n+1)P_n(x)$.

En dérivant $n+1$ fois la relation (2), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+(n+1)2xU_n^{(n+1)}(x)+\frac{n(n+1)}{2}2U_n^{(n)}(x)-2nxU_n^{(n+1)}(x)-2n(n+1)U_n^{(n)}(x)=0$$

donc $(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+2xU_n^{(n+1)}(x)=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$ i.e. $\big((x^2-1)U_n^{(n+1)}(x)\big)'=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$

et donc $L(P_n)=n(n+1)P_n$.

3.c $n(n+1)(P_n\mid P_m)=(L(P_n)\mid P_m)=(P_n\mid L(P_m))=m(m+1)(P_n\mid P_m)$

donc $\big(n(n+1)-m(m+1)\big)(P_n\mid P_m)=0$.

Or $n\mapsto n(n+1)$ est injective et $n\neq m$ donc $n(n+1)\neq m(m+1)$ puis $(P_n\mid P_m)=0$.

4.a $(P_0,\dots,P_n)$ est base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut écrire $Q=\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_nP_n$.

Par suite $(P_{n+1}\mid Q)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(P_{n+1}\mid P_k)=0$.

4.b Notons $a_1,\dots,a_p$ les racines de multiplicités impaire du polynôme P_{n+1} appartenant à $]-1,1[$.

Posons $Q=\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.

Le polynôme QP_{n+1} n'a que des racines de multiplicité paire dans $]-1,1[$, il est donc de signe constant sur $[-1,1]$ et par suite $\int_{-1}^{1}Q(x)P_{n+1}(x)\mathrm{d}x\neq 0$ (par non nullité de l'intégrale d'une fonction continue, non nulle, et de signe constant). Par suite $p=\deg Q>n$.

Or P_{n+1} est de degré $n+1$ donc nécessairement $p\leq n+1$ et donc finalement $p=n+1$.

Par suite P_{n+1} possède $n+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

De plus, puisque $\deg P_{n+1}=n+1$, on peut assurer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

5.a $P_{n+1}'=(n+1)a_{n+1}X^n+Q$ avec $\deg Q<n$ ou encore $P_{n+1}'=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n+\hat{Q}$ avec $\deg\hat{Q}<n$.

Par suite $(P_{n+1}'\mid P_n)=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}(P_n\mid P_n)+(\hat{Q}\mid P_n)=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$ car $(\hat{Q}\mid P_n)=0$.

5.b $\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n(x)^2\,\mathrm{d}x=\big[xP_n(x)^2\big]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_n'(x)\mathrm{d}x=2-2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_n'(x)\mathrm{d}x$.

5.c $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n+1}$ donc $(P_{n+1}'\mid P_n)=(2n+1)\|P_n\|^2$.

De plus $P_{n+1}'(x)=xP_n'(x)+(n+1)P_n(x)$ donc $(P_{n+1}'\mid P_n)=(XP_n'\mid P_n)+(n+1)(P_n\mid P_n)$

or $(XP_n'\mid P_n)=\int_{-1}^{1}xP_n'(x)P_n(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\|P_n\|^2$

donc $(2n+1)\|P_n\|^2=1-\frac{1}{2}\|P_n\|^2+(n+1)\|P_n\|^2$ puis $\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}$.

6. P_{n+1} est un vecteur normal à l'hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$ de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Par suite $d(X^{n+1},\mathbb{R}_n[X])=\left\|\frac{(X^{n+1}\mid P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}P_{n+1}\right\|=\frac{\left|(X^{n+1}\mid P_{n+1})\right|}{\|P_{n+1}\|}$.

or $X^{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1}} P_{n+1} + Q$ avec $\deg Q < n+1$ donc $(X^{n+1} \mid P_{n+1}) = \dfrac{1}{a_{n+1}} \left\| P_{n+1} \right\|^2$

Par suite $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \dfrac{1}{|a_{n+1}|} \left\| P_{n+1} \right\| = \dfrac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$.