Nombres réels
Résumé Lacunaire

I) Rappels et Compléments

1) Valeur absolue

Déf 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} \text{[redacted]} & \text{si } x \geq 0 \\ \text{[redacted]} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Prop 2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x|$ [redacted] 0

2) $|-x|$ [redacted] $|x|$

3) $|xy| =$ [redacted]

4) $\left|\frac{x}{y}\right| =$ [redacted] $(\text{si } y \neq 0)$

5) $|x|^2$ [redacted] $|x^2|$ [redacted] x^2

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| =$ [redacted]

7) $\begin{cases} |x| \text{ [redacted] } x \\ |x| \text{ [redacted] } -x \end{cases}$

8) $|x| = 0 \Leftrightarrow x$ [redacted]

9) $|x-y| = 0 \iff$ [redacted]

10) $|x| = |y| \iff x =$ [redacted]

11) $||x|| =$ [redacted]

12) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n| =$ [redacted]

13) $\sqrt{x^2} =$ [redacted]

14) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} =$ [redacted]

15) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| \prod_{k=1}^{n} x_k \right| = \text{[redacted]}$$

Prop 3 (Inégalité triangulaire)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x+y| \leqslant$ [redacted] (Inégalité triangulaire)

2) $|x+y| = |x| + |y| \iff$ ([redacted])

Corollaire 4 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leqslant \text{[redacted]}$$

(Inégalité triangulaire généralisée)

Corollaire 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

1) $|x-y| \leq$ [redacted]

2) $\big|$ [redacted] $\big| \leq |x-y|$

Prop 6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. On a :

1) i) $|x| \leq r \iff$ [redacted]

ii) $|x| < r \iff$ [redacted]

2) i) $|x| \geq r \iff ($ [redacted] $)$

ii) $|x| > r \iff ($ [redacted] $)$

2) Partie entière

Prop et déf 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) Il existe un unique entier relatif m vérifiant :

$$m \leq x < m+1$$

2) m s'appelle [redacted] de x, et se note [redacted].

NB

$\lfloor x \rfloor$ se note aussi $E(x)$ ou $[x]$.

Prop 2

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in$ [redacted]

2) $\lfloor x \rfloor = p \iff \begin{cases} p \text{ [redacted]} \\ p \in \text{ [redacted]} \end{cases}$

3) i) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant x <$ [redacted]

ii) $\forall x \in \mathbb{R},$ [redacted] $\leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant$ [redacted]

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor =$ [redacted]

5) i) $\forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor m \rfloor =$ [redacted]

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in$ [redacted]

Attention

L'égalité « $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ » est [redacted]

Réflexes à avoir

Ici $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

1) $x \geqslant m \Rightarrow \lfloor x \rfloor$ [redacted] m

2) $x > m \Rightarrow \lfloor x \rfloor$ [redacted] m

3) $x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor$ [redacted] m

4) $x < m \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant$ [redacted]

Prop 3

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, 0 \leq \varepsilon < 1\ ,\ x =$ [redacted]

Prop 4 (Croissance de la partie entière)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \text{ [redacted] } \lfloor y \rfloor$$

NB

1) $x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor$ [redacted] $\lfloor y \rfloor$

2) Attention !

L'implication suivante est en général fausse.

« x [redacted] $y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor$ [redacted] $\lfloor y \rfloor$ »

Vocab :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(x - \lfloor x \rfloor)$ s'appelle la partie [redacted] de x.

3) Approximation décimale d'un nombre réel

Déf

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par [redacted] est :

$$10^{-n} \cdot \lfloor 10^{n} \cdot x \rfloor$$

2) L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par [redacted] est :

$$10^{-n} \cdot \left(\lfloor 10^{n} \cdot x \rfloor + 1 \right)$$

II) Borne supérieure – Borne inférieure

1) Parties bornées

Prop

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a :

A bornée $\Leftrightarrow$ ($\exists C \geqslant 0$, $\forall x \in$ [redacted] $\leqslant$ [redacted])

2) Borne supérieure – Borne inférieure

a) Borne supérieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) La borne supérieure de A est le plus [redacted] de ses [redacted]
« sous réserve d'existence »

2) On la note $\sup(A)$.

NB

1) $\sup(A)$ est un m[redacted] de A.

2) $\forall x \in A,\ x$ [redacted] $\sup(A)$.

Prop 2

Si A possède un plus grand élément $\max(A)$, alors c'est [redacted]

C-à-d : [redacted] $= \max(A)$

Prop 3 (Existence de la borne supérieure)

Toute partie [redacted] et [redacted] de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Prop 4 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sup(A) = \alpha \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \ \text{[redacted]}\ \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \text{[redacted]} < \text{[redacted]} \end{cases}$$

---

a) Borne inférieure

Déf 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) La borne inférieure de A est le plus [redacted] de ses [redacted].

« sous réserve d'existence »

2) On la note $\inf(A)$.

NB

1) $\inf(A)$ est un [redacted] de A.
2) $\forall x \in A$, [redacted] $\geqslant$ [redacted]

Prop 2

Si A possède un plus petit élément $\min(A)$, alors c'est [redacted].

Càd : [redacted] $= \min(A)$

Prop 3 (Existence de la borne inférieure)

Toute partie [redacted] et [redacted] de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Prop 4 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\inf(A) = \beta \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ \beta \leq \text{[redacted]} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \text{[redacted]} < \text{[redacted]} \end{cases}$$

Réflexes à avoir

$$\sup(A) \leq M \iff (\forall x \in A,\ \text{[redacted]} \leq \text{[redacted]})$$

$$m \leq \inf(A) \iff (\forall x \in A,\ \text{[redacted]} \leq \text{[redacted]})$$

III) Densité d'une partie de $\mathbb{R}$

1) Intervalles de $\mathbb{R}$

Rappel (Segment de $\mathbb{R}$)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$.

1) On rappelle que :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

2) $[a,b]$ s'appelle segment.

Déf 1

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I est dit intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$\forall (x,y) \in I^2$, avec $x \leq y$, on a [redacted] $\subset$ [redacted]

Convention

$\emptyset$ est par convention un intervalle de $\mathbb{R}$.

Prop 2

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de l'une des formes suivantes :

1) i) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] x [redacted] $b\}$

ii) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] x [redacted] $b\}$

iii) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] x [redacted] $b\}$

iv) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] x [redacted] $b\}$

où $a \leq b$, deux réels.

2) i) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] $x\}$

ii) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a$ [redacted] $x\}$

iii) $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x$ [redacted] $a\}$

iv) $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x$ [redacted] $a\}$

3) $]-\infty,+\infty[$, qui est [redacted]

2) Densité

Déf 1

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si entre deux réels distincts [redacted]

Autrement dit

A est dense dans $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \big(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x < y$, $\exists a \in$ [redacted] , [redacted] $<$ [redacted] $<$ [redacted] $\big)$

Prop 2

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dense dans $\mathbb{R}$.

2) $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists a \in$ [redacted]

3) $\forall x < y \in \mathbb{R},]x, y[\cap A$ [redacted]

Prop 3

1) [redacted] est dense dans $\mathbb{R}$.

2) [redacted] est dense dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit

1) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre [redacted]

2) Entre deux réels distincts existe au moins un nombre [redacted]

IV) Droite numérique achevée

Déf 1

La droite numérique achevée est l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$, et qui est défini par :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup$$ [redacted]

Prolongement de l'ordre $\leqslant$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Si x et $y \in \mathbb{R}$.

« $x \leqslant y$ » C'est l'ordre connu dans $\mathbb{R}$.

2) Si $x \in \mathbb{R}$.

i) $-\infty \leqslant x$

ii) $x \leqslant +\infty$

3) i) $-\infty \leqslant -\infty$

ii) $+\infty \leqslant +\infty$

iii) $-\infty \leqslant +\infty$

Prop 2

1) " $\leqslant$ " est une relation [redacted] sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Dans l'ensemble ordonné $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$, toute partie [redacted] admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Fin