

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mercredi 19 mai 2004 de 08h00 à 12h00

EXTRAIT

Deuxième problème

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres réels.

I. Etude de structures

1.

- a) Démontrer que E , muni de l'addition des matrices et de leur produit par un scalaire réel, est un espace vectoriel réel.
- b) Trouver une base et la dimension de E .

2.

- a) Démontrer que E est stable pour la multiplication des matrices.
- b) En déduire que E , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau.
- c) Cet anneau est-il commutatif ?

3. On désigne par G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$.
Démontrer que G est un groupe multiplicatif.

II. Puissances d'une matrice et suites

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$.

4.

- a) On suppose $a \neq b$. Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$.

- b) On suppose que $a = b$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$; on exprimera les coefficients en fonction de a et c .

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$, en convenant que

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout } x \text{ réel, } \varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses.
b) Démontrer que, pour x fixé, la suite de terme général $\varphi_n(x)$ converge et que sa limite est e^x .
c) On suppose $a \neq b$.

Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \varphi_n(a)$ et $\varphi_n(b)$.

Démontrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.

- d) On suppose $a = b$.

Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \varphi_{n-1}(a)$ et $\varphi_n(a)$.

Démontrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.

6.

Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$, on pose $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où α, β et γ ont été définis à la

question 5, et on note f l'application de E dans E définie par $f(A) = A'$.

- a) L'application f est-elle linéaire ?
b) L'application f est-elle injective ?
c) L'application f est-elle surjective ?
d) Déterminer l'image de E par f .

7. On suppose maintenant que $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$.

On pose, pour $A \in E$, $\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (f(A) - I)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ et $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

- a) Calculer a_n, b_n et c_n lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a = b$ (on pourra utiliser les résultats de la question 4).
b) Démontrer que si $0 < x < 1$, la suite de terme général $\psi_n(x)$, x fixé, converge vers $\ln(1+x)$.
c) Dans chacun des deux cas précédents, démontrer que les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$ ont respectivement pour limites a, b et c .

FIN

