



Extrait

III : PROBLEME

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout

entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \text{ (transformation d'Abel).}$$

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Fin extrait