

Nombres algébriques

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On dit que a est **algébrique** s'il existe un polynôme non nul Q , à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que $Q(a) = 0$.

Un tel polynôme Q s'appelle polynôme **annulateur** non nul de a .

On dit que a est **transcendant** quand il n'est pas algébrique.

- 1)
 - i) Montrer que $1, \sqrt{2}, (\sqrt{2} - 4\sqrt{3})$ sont algébriques, préciser pour chacun un polynôme annulateur non nul.
 - ii) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
- 2) Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
Montrer que si a est algébrique alors il en est de même pour $-a$ et $\frac{1}{a}$, et préciser pour chacun un polynôme annulateur non nul.
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que a est algébrique si et seulement s'il existe un polynôme non nul P , à coefficients rationnels, tel que $P(a) = 0$.
- 4) Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $I_a = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(a) = 0\}$.
Montrer que I_a est un idéal de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$.
- 5) Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique.
Montrer alors qu'il existe un unique polynôme unitaire π_a de $\mathbb{Q}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de a soit formé des multiples de π_a dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$.
 π_a s'appelle **le polynôme minimal** de a .
- 6)
 - i) Montrer que le polynôme minimal d'un nombre algébrique est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
 - ii) Montrer que $(1 + \sqrt{2})$ est un nombre algébrique, et déterminer son polynôme minimal.
- 7) Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $\mathbb{Q}[a] = \{P(a) \mid P \in \mathbb{Q}[X]\}$.
Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
- 8) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que a est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[a]$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- 9) Montrer que si a est algébrique alors $\mathbb{Q}[a]$ est un corps.
- 10) Supposons ici que $a \in \mathbb{R}$ est un nombre algébrique et que $\dim(\mathbb{Q}[a]) = 2$.
Montrer qu'il existe un nombre rationnel positif δ tel que $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.