Calcul matriciel

Opérations sur les matrices

Exercice 1 [01247] [correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A.
On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier $J.A.J = \sigma(A).J$.

Exercice 2 [01248] [correction]
Pour $i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indices (i, j) et (k, ℓ). Calculer

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell}$$

Exercice 3 [01249] [correction]
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

Exercice 4 [01250] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda.I_n$$

Exercice 5 [00403] [correction]
Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

avec $0 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a$ et $b + c \leqslant a + d$.
Pour tout $n \geqslant 2$, on note

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$b_n + c_n \leqslant a_n + d_n$$

Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 6 [01251] [correction]
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et les matrices A suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 7 [01252] [correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 8 [01253] [correction]
Calculer A^n pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de deux manières différentes.

Exercice 9 [01254] [correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 10 [02929] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Majorer les coefficients de A^k.
b) Calculer A^{-1}.
c) Calculer $(A^{-1})^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Inversion de matrice

Exercice 11 [01255] [correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$
Observer que
$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$
A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Exercice 12 [01256] [correction]
Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 13 [01257] [correction]
Justifier que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 14 [01258] [correction]
[Matrice à diagonale strictement dominante]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$
Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 15 [01259] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose
$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$
Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16 [01260] [correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
a) Calculer $(A+I)^3$.
b) En déduire que A est inversible.

Exercice 17 [01261] [correction]
Soit $A = (1 - \delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
a) Calculer A^2.
b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 18 [01262] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose $B = (I-A)(I+A)^{-1}$.
a) Montrer que $B = (I+A)^{-1}(I-A)$.
b) Montrer que $I + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Exercice 19 [03420] [correction]
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 2)$ non nulles vérifiant
$$ABC = O_n$$
Montrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

Exercice 20 [03422] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$AB = A + B$$
Montrer que A et B commutent

Exercice 21 [02575] [correction]
Montrer que la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Transposition

Exercice 22 [01263] [correction]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Exercice 23 [01264] [correction]
Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Structures formées de matrices

Exercice 24 [01265] [correction]
Soit

$$E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Montrer que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

Exercice 25 [01266] [correction]
Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.
Notre objectif est d'établir que l'inverse d'une matrice inversible de E appartient encore à E, sans pour autant calculer cet inverse.
a) Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.
b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
c) A quelle condition sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, la matrice $A=M(a,b,c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f:E\to E$ définie par $f(X)=AX$, montrer que $A^{-1}\in E$.

Exercice 26 [01267] [correction]
[Matrices de permutation]
Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note

$$P(\sigma)=\left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

appelée matrice de permutation associée à σ.
a) Montrer que

$$\forall(\sigma,\sigma')\in\mathfrak{S}_n^2, P\left(\sigma\circ\sigma'\right)=P(\sigma)P(\sigma')$$

b) En déduire que $E=\{P(\sigma)/\sigma\in\mathfrak{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.
c) Vérifier que

$$^t\left(P(\sigma)\right)=P(\sigma^{-1})$$

Exercice 27 [01268] [correction]
Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme

$$A=\begin{pmatrix} a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\text{ avec }(a,b)\in\mathbb{K}^2$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, en donner une base.
b) Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
c) Déterminer les inversibles de E.
d) Déterminer les diviseurs de zéro de E c'est-à-dire les matrices A et $B\in E$ vérifiant $AB=O_2$ avec $A,B\neq O_2$.

Exercice 28 [01563] [correction]
On dit qu'une matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est centro-symétrique si

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, a_{n+1-i,n+1-j}=a_{i,j}$$

a) Montrer que le sous-ensemble C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices centro-symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que le produit de deux matrices centro-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi centro-symétrique.
c) Soit A centro-symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et inversible.
En considérant l'application $X \mapsto AX$ de C vers C, montrer que A^{-1} est centro-symétrique.

Représentation matricielles d'une application linéaire

Exercice 29 [01269] [correction]
Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y-2x+z) \end{cases}$ b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$ d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$

Exercice 30 [01270] [correction]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\right\} \text{ et } D = \mathrm{Vect}(w) \text{ où } w = (1,0,-1)$$

On note $\mathcal{B} = (i,j,k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.
a) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
b) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Exercice 31 [01271] [correction]
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.
a) Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 32 [01273] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 [01275] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ forme une base de E.
b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.
c) En déduire que

$$\{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$$

Changement de base

Exercice 34 [01276] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice de f dans cette base.
c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 35 [01277] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i,j,k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?
b) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.
c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$?

Exercice 36 [01278] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
a) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.
c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 37 [00716] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1), \varepsilon_2 = (-1, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.
b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.
c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 38 [01282] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.
b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 39 [01283] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.
b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.
c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 40 [01284] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
b) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 41 [03212] [correction]
Soient $b = (i, j)$ et $B = (I, J)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et P la matrice de passage de b à B.
Pour $x \in E$, notons

$$v = \text{Mat}_b x \text{ et } V = \text{Mat}_B x$$

a) Retrouver la relation entre v et V.
b) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$m = \text{Mat}_b f \text{ et } M = \text{Mat}_B f$$

Retrouver la relation entre m et M.
c) Par quelle méthode peut-on calculer m^n lorsqu'on connaît deux vecteurs propres non colinéaires de f.

Rang d'une matrice

Exercice 42 [01285] [correction]
Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:
a) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 1, 0), x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (0, 1, 1)$
b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (2, 1, 1), x_2 = (1, 2, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 2)$
c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1), x_2 = (1, 0, 3)$ et $x_3 = (1, 1, 2)$.

Exercice 43 [01286] [correction]
Calculer le rang des applications linéaires suivantes :
a) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

b) $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

c) $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$$

Exercice 44 [01287] [correction]
Calculer le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & a \end{pmatrix}$

Exercice 45 [01288] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
b) Préciser noyau et image de M.
c) Calculer M^n.

Exercice 46 [01289] [correction]
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = O_3$.
Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 47 [01290] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe des matrices B et C respectivement dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

Exercice 48 [01291] [correction]
Montrer que les matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ suivantes sont inversibles, et déterminer leur inverse par la méthode de Gauss

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 49 [01292] [correction]
Discuter, selon m paramètre réel, la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
a) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \end{cases}\right\}$ b)
$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}\right\}$.

Exercice 50 [01293] [correction]
On considère, pour m paramètre réel, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + my + z = 0 \text{ et } mx + y - mz = 0\right\}$ et
$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - my + z = 0\right\}$.
a) Déterminer la dimension de F et G.
b) Discuter, selon la valeur de m, la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 51 [01294] [correction]
Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

a) $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$

Exercice 52 [01295] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 53 [01296] [correction]
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \ldots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & 3x_n & = & 1 \\ & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 54 [01297] [correction]
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 55 [01298] [correction]
Soient $a_1, ..., a_n$ des points du plan complexe.
Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe au moins un polygone à n sommets $z_1, ..., z_n$ tel que :
a_i est le milieu de $[z_i, z_{i+1}]$ et a_n est le milieu de $[z_n, z_1]$.

Exercice 56 [02560] [correction]
Discuter suivant a et b et résoudre

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 57 [02579] [correction]
Résoudre, en discutant selon $a, b \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons

$$A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

On a

$$\sigma(A)=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}$$

Par produit $B=A.J=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}.1$ et $C=J.A.J=J.B=(c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^n 1.b_{k,j}=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{k,l}=\sigma(A)$$

Ainsi $C=\sigma(A).J$.

Exercice 2 : [énoncé]
On peut décrire

$$E_{i,j}=(\delta_{p,i}\delta_{q,j})_{1\leqslant p,q\leqslant n}\text{ et }E_{k,\ell}=(\delta_{p,k}\delta_{q,\ell})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$$

On a alors

$$A=E_{i,j}E_{k,\ell}=(a_{p,q})$$

avec

$$a_{p,q}=\sum_{r=1}^n(\delta_{p,i}\delta_{r,j})(\delta_{r,k}\delta_{q,\ell})=(\sum_{r=1}^n\delta_{r,j}\delta_{r,k})\delta_{p,i}\delta_{q,\ell}=\delta_{j,k}\delta_{p,i}\delta_{q,\ell}$$

Ainsi

$$E_{i,j}E_{k,\ell}=\delta_{j,k}E_{i,\ell}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$B=AD=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=a_{i,j}\lambda_j$ et $C=DA=(c_{i,j})$ avec $c_{i,j}=\lambda_i a_{i,j}$.
On a $AD=DA$ si, et seulement si,

$$\forall 1\leqslant i,j\leqslant n, a_{i,j}\lambda_i=a_{i,j}\lambda_j$$

soit

$$\forall 1\leqslant i,j\leqslant n, a_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)=0$$

Les $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ étant deux à deux distincts, $AD=DA$ si, et seulement si,

$$\forall 1\leqslant i\neq j\leqslant n,\ \ a_{i,j}=0$$

ce qui signifier que A est diagonale.

Exercice 4 : [énoncé]
Si A est solution alors $AE_{i,j}=E_{i,j}A$ implique $a_{i,i}=a_{j,j}$ et $a_{i,k}=0$ pour $k\neq i$ donc $A=\lambda.I_n$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $n\geqslant 1$, en exploitant $M^{n+1}=M\times M^n$, on a

$$\begin{cases}a_{n+1}=aa_n+bc_n\\ b_{n+1}=ab_n+bd_n\\ c_{n+1}=ca_n+dc_n\\ d_{n+1}=cb_n+dd_n\end{cases}$$

Par suite

$$a_{n+1}+d_{n+1}-(b_{n+1}+c_{n+1})=(a-c)(a_n-b_n)+(b-d)(c_n-d_n)$$

Sachant $a\geqslant c$ et $b\geqslant d$, il suffit d'établir $a_n\geqslant b_n$ et $c_n\geqslant d_n$ pour conclure.
Dans le cas $n=1$, la propriété est vérifiée.
Dans le cas $n\geqslant 2$, exploitons la relation $M^n=M^{n-1}\times M$

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}a+b_{n-1}c\\ b_n=a_{n-1}b+b_{n-1}d\\ c_n=c_{n-1}a+d_{n-1}c\\ d_n=c_{n-1}b+d_{n-1}d\end{cases}$$

On a alors

$$a_n-b_n=a_{n-1}(a-b)+b_{n-1}(c-d)\text{ et }c_n-d_n=c_{n-1}(a-b)+d_{n-1}(c-d)$$

Puisqu'il est évident que $a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1}\geqslant 0$ (cela se montre par récurrence), on obtient sachant $a-b\geqslant 0$ et $c-d\geqslant 0$ les inégalités permettant de conclure.
Notons que l'hypothèse $b+c\leqslant a+d$ ne nous a pas été utile.

Exercice 6 : [énoncé]
a) On observe

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

avec $a_{n+1} = 1 + 2a_n$.
En introduisant $b_n = a_n + 1$, on obtient $a_n = 2^n - 1$.
Ainsi

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

b) Par récurrence

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

c) Par récurrence

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : [énoncé]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = O_3$ pour $n \geqslant 3$.
Comme B et I commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = (I + B)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) Par récurrence

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque I_3 et B commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

car $B^k = O_3$ pour $k \geqslant 3$

Exercice 9 : [énoncé]
a) $A^2 - 3A + 2I = 0$. Comme $A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I) = I$, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Sachant que le reste de la division euclidienne considérée est de la forme $aX + b$, en évaluant en 1 et 2, on détermine a et b et on obtient :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

c) On peut remplacer X par A dans le calcul qui précède et on obtient :

$$A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3.2^n - 3 & 3.2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Si M_k majore les coefficients de A^k alors nM_k majore les coefficients de A^{k+1}.
On en déduit que les coefficients de A^k sont majorés par

$$n^{k-1}$$

On peut sans doute proposer plus fin.
b) Posons T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de coefficients $(i, i+1)$ qui valent 1. On remarque

$$A = I_n + T + \cdots + T^{n-1}$$

On en déduit

$$(I-T)A = I_n - T^n$$

et puisque $T^n = O_n$, on obtient

$$A^{-1} = I - T$$

c) Le calcul des puissances de A^{-1} est immédiat

$$(A^{-1})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} T^j$$

et donc le coefficient d'indice (i,j) de $(A^{-1})^k$ est

$$a_{i,j}^{-k} = (-1)^{j-i}\binom{k}{j-i} = (-1)^{j-i}\frac{k(k-1)\dots(k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1}$$

Cette formule laisse présumer que le coefficient d'indice (i,j) de A^k est

$$a_{i,j}^{k} = (-1)^{j-i}\frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1} = \binom{k+j-i-1}{j-i}$$

ce que l'on démontre en raisonnant par récurrence.

Exercice 11 : [énoncé]
La relation $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I = 0$ est immédiate
Si $ad-bc \neq 0$ alors A est inversible et
$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$.
Si $ad-bc = 0$ alors $A^2-(a+d)A = 0$.
Par l'absurde, si A est inversible, A est régulière donc $A = (a+d)I$ puis $A = O$. Absurde.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Par la méthode du pivot, on opère sur les lignes d'une matrice de blocs A et I_n pour transformer A en I_n. On sait qu'alors le bloc I_n sera transformé en A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On conclut

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

On conclut

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

On conclut

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 : [énoncé]
A est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'équation $Y = AX$ équivaut à $X = A^{-1}Y$ or

$$\begin{cases} x_1 - (x_2 + \cdots + x_n) = y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 + \cdots + 2^{n-2}y_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = y_{n-2} + y_{n-1} + 2y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 : [énoncé]
Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0$$

Si $m = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leqslant \frac{\sum_{j\neq i} |\lambda_j| \, |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leqslant m \frac{\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de m.
Par suite, la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre et donc A inversible.

Exercice 15 : [énoncé]
$A = (a_{k,\ell})$ avec $a_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$. $\bar{A} = (b_{k,\ell})$ avec
$b_{k,\ell} = \bar{a}_{k,\ell} = \bar{\omega}^{(k-1)(\ell-1)} = \omega^{-(k-1)(\ell-1)}$.
$A\bar{A} = (c_{k,\ell})$ avec

$$c_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m} b_{m,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)} \omega^{-(m-1)(\ell-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^{k-\ell})^m$$

Si $k = \ell$ alors $\omega^{k-\ell} = 1$ et

$$c_{k,k} = n$$

Si $k \neq \ell$ alors $\omega^{k-\ell} \neq 1$ et

$$c_{k,\ell} = \frac{1 - (\omega^{k-\ell})^n}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0$$

Ainsi $A\bar{A} = nI_n$. On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) $(A + I)^3 = O_3$.
b) $A^3 + 3A^2 + 3A + I = O$ donc A est inversible et $A^{-1} = -(A^2 + 3A + 3I)$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) $A = J - I_n$ avec $J^2 = nJ$ donc $A^2 = (n-2)J + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$.
b) $AB = I_n$ pour $B = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n)$ donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Comme $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A)$, on a, en multipliant à droite et à gauche par $(I+A)^{-1}$, la relation $(I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I-A)$.
b) $(I+A)(I+B) = (I+A)+(I-A) = 2I$ donc $I+B$ est inversible et $(I+B)^{-1} = \frac{1}{2}(I+A)$.
$(I-B)(I+B)^{-1} = \frac{1}{2}(I+A-(I-A)) = A$.

Exercice 19 : [énoncé]
Supposons A et B inversibles. En multipliant à gauche par A^{-1} et B^{-1} on obtient $C = O_n$ ce qui est exclu.
En raisonnant de façon analogue, on exclut les autres cas où deux des trois matrices sont inversibles.

Exercice 20 : [énoncé]
On a
$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$$
On en déduit que $I_n - A$ est inversible et que $I_n - B$ est son inverse. L'égalité
$$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$$
entraîne alors
$$BA = A + B$$
et on peut conclure que A et B commutent.

Exercice 21 : [énoncé]
On a $A^2 = 3I + 2A$ donc
$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$$

Exercice 22 : [énoncé]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sachant
$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$
on a
$${}^t(AB) = AB \Leftrightarrow BA = AB$$
Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si, les deux matrices commutent.

Exercice 23 : [énoncé]
On peut procéder de manière élémentaire ou exploiter que l'application $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $T(A) = {}^tA$ est un endomorphisme involutif donc une symétrie vectorielle ce qui assure que les espaces $\ker(T - \mathrm{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\ker(T + \mathrm{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Exercice 24 : [énoncé]
$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$ avec $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(00,1) = J^2$.
$E = \mathrm{Vect}(I,J,K)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
$M(a,b,c)M(a',b',c') = (aa' + bc' + cb')I + (ab' + a'b + cc')J + (ac' + a'c + bb')K$.
Donc E est une sous algèbre (visiblement commutative) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 25 : [énoncé]
a) $M(a,b,c) = a.I + b.J + c.K$ avec
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On observe que : $E = \mathrm{Vect}(I,J,K)$. Par suite E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus la famille (I,J,K) est libre, c'est donc une base de E et par suite $\dim E = 3$.
b) De plus $I \in E$, $M(a,b,c) - M(a',b',c') = M(a-a', b-b', c-c') \in E$ et
$M(a,b,c)M(a',b',c') = (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K) =$
$aa'I + (ab' + a'b)J + (ac' + bb' + ca')K \in E$.
Donc E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus $M(a,b,c)M(a',b',c') = M(a',b',c')M(a,b,c)$, donc E est un anneau commutatif.
c) A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ (ici A est triangulaire supérieure)
$f(\lambda.X + \mu.Y) = A(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.AX + \mu.AY = \lambda.f(X) + \mu.f(Y)$. f est un endomorphisme de E.
Soit $X \in E$, si $X \in \ker f$ alors $AX = O$ puis $A^{-1}AX = O$ d'où $X = O$. Par suite $\ker f = \{0\}$
f est un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme. Par suite il existe $B \in E$ telle que $f(B) = AB = I$.
En multipliant par A^{-1}, on conclut $A^{-1} = B \in E$.

Exercice 26 : [énoncé]
a) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Notons f_σ l'endomorphisme canoniquement associé à $P(\sigma)$.
Pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
Par suite $(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_j) = f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)$ puis $P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma)P(\sigma')$
b) $I_n = P(\mathrm{Id}) \in E$.
$P(\sigma)P(\sigma') = P(\sigma \circ \sigma') \in E$
et $P(\sigma)P(\sigma^{-1}) = P(\sigma \circ \sigma^{-1}) = P(\mathrm{Id}) = I_n$ donc $P(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1}) \in E$.
On peut alors conclure que E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
L'application $P : \mathfrak{S}_n \to E$ qui à σ associe $P(\sigma)$ est un morphisme de groupe surjectif.
Soit $\sigma \in \ker P$, on a $P(\sigma) = I_n$ donc $\forall 1 \leqslant j \leqslant n, \sigma(j) = j$ soit $\sigma = \mathrm{Id}$.
c)
$$^tP(\sigma) = (\delta_{j,\sigma(i)})_{i,j} = (\delta_{\sigma^{-1}(j),i})_{i,j} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{i,j} = P(\sigma^{-1})$$

Exercice 27 : [énoncé]
a) $E = \mathrm{Vect}(I, J)$ avec
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
La famille (I, J) forme une base de E car cette famille est évidemment libre.
b) $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $I \in E$. Soient $A = aI + bJ \in E$ et $B = cI + dJ \in E$.
$A - B = (a-c)I + (b-d)J \in E$ et $AB = (ac)I + (ac+bd)J$ car $J^2 = O$.
Ainsi E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus $AB = BA$ donc E commutatif.
c) Avec les notations précédentes $AB = I$ si, et seulement si,
$$\begin{cases} ac = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$
Par suite A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$.
d) Avec les notations précédentes $AB = O_2$ si et seulement si
$$\begin{cases} ac = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$
Les diviseurs de zéros sont donc les matrices
$$\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{K}$$

Exercice 28 : [énoncé]
a) $C \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $O_n \in C$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in C$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$(\lambda A + \mu B)_{n+1-i,n+1-j} = \lambda A_{n+1-i,n+1-j} + \mu B_{n+1-i,n+1-j} = \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}$$
et donc
$$(\lambda A + \mu B)_{n+1-i,n+1-j} = (\lambda A + \mu B)_{i,j}$$
On en déduit $\lambda A + \mu B \in C$.
Ainsi C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Soient $A, B \in C$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$$
donc
$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{k=1}^n a_{n+1-i,k}b_{k,n+1-j}$$
Par le changement d'indice $\ell = n+1-k$
$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{\ell=1}^n a_{n+1-i,n+1-\ell}b_{n+1-\ell,n+1-j}$$
et puisque A et B sont centro-symétriques
$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}b_{\ell,j} = (AB)_{i,j}$$
Ainsi $AB \in C$.

c) L'application $\varphi : X \in C \mapsto AX$ est linéaire et c'est évidemment un endomorphisme de C car C est stable par produit.
Soit $X \in \ker \varphi$. On a $AX = O_n$ donc $A^{-1}(AX) = O_n$ puis $X = O_n$.
On en déduit que l'endomorphisme φ est injectif, or C est un espace vectoriel de dimension finie, donc φ est un automorphisme de C.
Puisque la matrice I_n est centro-symétrique, par surjectivité de φ, il existe $B \in C$ vérifiant $AB = I_n$. Or $A^{-1}(AB) = A^{-1}$ donc $B = A^{-1}$ puis $A^{-1} \in C$.

Exercice 29 : [énoncé]
On note A la représentation matricielle cherchée.
a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) Pour $u = (x, y, z)$ calculons $p(u) = (x', y', z')$.
Comme $p(u) - u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $p(u) = u + \lambda.w$.
Comme $p(u) \in P$on a $x' + 2y' - z' = 0$ ce qui donne

$$\lambda = -(x + 2y - z)/2$$

et donc

$$p(u) = ((x - 2y + z)/2, y, (x + 2y + z)/2)$$

Par suite

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Comme $q = I - p$ et $s = 2p - I$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Les colonnes de A sont formées des coefficients de

$$\varphi(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

Ainsi $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leqslant j \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ sinon}$$

b) L'endomorphisme φ est inversible avec

$$\varphi^{-1}(P) = P(X-1)$$

On en déduit $\varphi^{-1}(X^j) = (X-1)^j$ d'où

$$A^{-1} = ((-1)^{j-i} a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$$

Exercice 32 : [énoncé]
Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Posons

$$e_1 = x, e_2 = f(x), e_3 = f^2(x)$$

Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ alors

$$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \lambda_3 f^2(x) = 0$$

En appliquant f^2 à cette relation, on a $\lambda_1 f^2(x) = 0$ car on sait $f^3 = 0$.
Puisque $f^2(x) \neq 0$, on a $\lambda_1 = 0$ et sans plus de difficultés on montre aussi $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre en dimension 3, c'est donc une base de E. La matrice de f dans celle-ci est comme voulue.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Comme $f^{n-1} \neq 0, \exists x \in E, f^{n-1}(x) \neq 0$.
Si $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$ alors :
en composant avec f^{n-1}, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$.
en composant successivement avec f^{n-2}, ..., f, I, on obtient successivement
$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-2} = 0, \lambda_{n-1} = 0$
Par suite $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est libre et forme donc une base de E.
b) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

puis

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{n-1}) = A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Notons $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.
Il est clair que $\mathrm{Vect}(I, f, f^2, ..., f^{n-1}) \subset C(f)$.
Inversement, soit $g \in C(f)$, notons $a_0, \ldots, a_{n-1}$ les composantes de $g(x)$ dans $\mathcal{B}$.
On a

$$\begin{cases} g(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x) \\ g(f(x)) = f(g(x)) = a_0 f(x) + \cdots + a_{n-2} f^{n-1}(x) \\ \vdots \\ g(f^{n-1}(x)) = f^{n-1}(g(x)) = a_0 f^{n-1}(x) \end{cases}$$

Par suite

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} g = \begin{pmatrix} a_0 & & & (0) \\ a_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}$$

Donc $g = a_0 I + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \in \mathrm{Vect}(I, f, \ldots, f^{n-1})$.
Ainsi

$$C(f) = \mathrm{Vect}(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Aisément la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puis c'est une base car formée de trois vecteurs en dimension 3.
b) $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 0$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On observe que $\varepsilon_3 \in \ker f$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathrm{Im} f$.
Le théorème du rang permet de conclure : (ε_3) est une base de $\ker f$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 35 : [énoncé]
a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

donc$f$ est une projection vectorielle.
b) En résolvant les équations $f(x) = x$ et $f(x) = 0$ on obtient que (u, v) forme une base de $\mathrm{Im} f$ et (w) forme une base de $\ker f$ avec $u = i + j, v = i + k$ et $w = i + j + k$.
c)

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 36 : [énoncé]
a) $\ker f = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(v, w)$ avec $v = (2, -1, -1), w = (-1, 2, -1)$.
Comme $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est libre on peut conclure que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) $\mathcal{C}$ est une base adaptée à la supplémentarité de $\ker f$ et Imf.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) f est la composée, commutative, de l'homothétie vectorielle de rapport 3 avec la projection vectorielle sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
b) $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1,\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Par récurrence :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par changement de bases avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) $\mathcal{B}'$ est libre et formée de trois vecteurs en dimension 3, c'est une base de E.
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3$ donc $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$.
b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Par formule de changement base

$$A = PDP^{-1}$$

d) Puisqu'il est facile de calculer D^n

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 39 : [énoncé]
a) En recherchant des vecteurs tels que $f(x) = x, f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$ on observe que $\varepsilon_1 = (-1, 1, 2), \varepsilon_2 = (0, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ conviennent. De plus ces trois vecteurs forment une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.
b)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Par changement base

$$A = PDP^{-1}$$

d) Sachant calculer D^n on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1-3^n & -1+3^n \\ -2^n+3^n & -1+3.2^n-3^n & 1-2.2^n+3^n \\ -2^n+3^n & -2+3.2^n-3^n & 2-2.2^n+3^n \end{pmatrix}$$

qu'on peut encore écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 40 : [énoncé]
a) En résolvant les équations : $f(u) = 0, f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ on trouve que $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3, \varepsilon_2 = e_2 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$ sont des vecteurs tels que $f(\varepsilon_1) = 0, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.
On vérifie aisément que la famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de E, celle-ci convient.
b) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Par changement de base

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1}-1 & -2^n & 1-2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Posons $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$. On observe $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence $X_n = A^nX_0$.

Avec $X_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient

$$\begin{cases} x_n = 2^{n+1} \\ y_n = 1 \\ z_n = 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

Exercice 41 : [énoncé]
a) P est la matrice de l'application Id_E dans les bases B au départ et b à l'arrivée.
La relation $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donne matriciellement $v = PV$.
b) La relation $f = \mathrm{Id}_E^{-1} \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donne matriciellement $M = P^{-1}mP$.
c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale et ses puissances sont alors faciles à calculer. Par changement de base, on en déduit m^n.

Exercice 42 : [énoncé]
a) $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$ b) $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$ c) $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3) = 2$

Exercice 43 : [énoncé]
a) $\mathrm{rg}(f) = 3$
b) $\mathrm{rg}(f) = 2$
c) $\mathrm{rg}(f) = 4$.

Exercice 44 : [énoncé]
a) Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix}.$$

En discutant les 5 cas possibles : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Card}\,\{a, b, c\}$.
b) Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\sin 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin\theta\sin 2\theta & \sin^2 2\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\sin\theta = 0$ alors $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Si $\sin\theta \neq 0$ alors

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} = 2.$$

Résumons : Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$, $\mathrm{rg}(A) = 2$, sinon $\mathrm{rg}(A) = 1$.
c) Notons A la matrice étudiée.
Cas $a = b = 0$ alors $\mathrm{rg}(A) = 0$ car la matrice A est nulle.
Cas $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(A) = n$ car les n colonnes de A sont indépendantes.
Cas $a \neq 0$:
En effectuant successivement :
$C_2 \leftarrow aC_2 - bC_1, C_3 \leftarrow a^2C_3 - bC_2, \ldots, C_n \leftarrow a^{n-1}C_n - bC_{n-1}$ on obtient :

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & a^n - (-1)^n b^n \end{pmatrix}$$ (il y a conservation du rang car $a \neq 0$).

Donc si $a^n = (-b)^n$ alors $\mathrm{rg}(A) = n - 1$, sinon $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exercice 45 : [énoncé]
a) En retirant la première ligne à la dernière

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis en ajoutant la deuxième ligne à la dernière etc.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(-1)^n \end{pmatrix}$$

Si n est pair alors $\mathrm{rg}M = n - 1$, sinon $\mathrm{rg}M = n$.
b) Dans le cas n impair c'est immédiat.
Dans le cas n pair : $\ker M = \mathrm{Vect}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et
$\mathrm{Im}M : x_1 - x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} - x_n = 0$.

c) $M = I + N$ avec la matrice de permutation

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 2C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 2C_n^0 & C_n^1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_n^2 \\ C_n^2 & & \ddots & \ddots & C_n^1 \\ C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & 2C_n^0 \end{pmatrix}$$

en notant $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Exercice 46 : [énoncé]
Soit u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B.
Comme $u \circ v = 0$, on a $\mathrm{Im} v \subset \ker u$, puis $\mathrm{rg}(v) = 3 - \dim \ker v \leqslant \dim \ker u$.
Par suite $\dim \ker u + \dim \ker v \geqslant 3$, puis $\dim \ker u \geqslant 2$ ou $\dim \ker v \geqslant 2$.
On a alors respectivement $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) \leqslant 1$ ou $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(B) \leqslant 1$.

Exercice 47 : [énoncé]
Comme $\mathrm{rg}(A) = r$, il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = QJ_rP$.
Posons $D = \begin{pmatrix} I_r \\ O_{n-r,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $E = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$.
On a $A = BC$ avec $B = QD \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $C = EP \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$

Exercice 48 : [énoncé]
a) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_2 \leftarrow C_2 + aC_1, C_3 \leftarrow C_3 + aC_2, \ldots, C_n \leftarrow C_n + aC_{n-1}$ on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

c) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,
puis encore $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,
on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 49 : [énoncé]
a) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = \pm 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$, donc $\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } m = \pm 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
b) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$, donc $\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 1 \\ 1 & \text{si } m = -2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 50 : [énoncé]
a) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \end{pmatrix} = 2$ donc $\dim F = 1$ et $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \end{pmatrix} = 1$ donc $\dim G = 2$.

b) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -m & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\dim F \cap G = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 51 : [énoncé]
a) Si $m = -1$ alors

$$\mathcal{S} = \{(y, y, -1)/\ y \in \mathbb{C}\}$$

Si $m \neq -1$ alors

$$\mathcal{S} = \left\{(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2})\right\}$$

b) On a

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1+m}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}$$

Si $m = 1$ alors

$$\mathcal{S} = \{(x, y, 1 - x - y)/x, y \in \mathbb{C}\}$$

Si $m = -2$ alors système incompatible

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

c) Si $m = 1$: système incompatible

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Si $m \neq 1$,

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz + t = m + 1 \\ (1 - m)y + (m - 1)z = 1 \\ (m + 2)z + t = \dfrac{m(m + 1)}{m - 1} \end{cases}$$

et donc

$$S = \left\{\left(z - \frac{m}{m-1}, y = z - \frac{1}{m-1}, z, \frac{m(m+1)}{m-1} - (m+2)z\right)/z \in \mathbb{C}\right\}$$

Exercice 52 : [énoncé]

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(1 - a)y + (1 - a^2)z = 1 - a \\ b(a - 1)y + (1 - a)z = b - 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + by + az = 1 \\ b(1 - a)y + (1 - a^2)z = 1 - a \\ (1 - a)(2 + a)z = b - a \end{cases}$$

Si $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $b \neq 0$:

$$x = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}, y = \frac{ab - 2 + b}{(a - 1)(a + 2)}, z = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}$$

Cas $a = 1$ alors

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = b - 1 \end{cases}$$

Si $b \neq 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $b = 1$ alors $\mathcal{S} : x + y + z = 1$.
Cas $a = -2$ alors

$$\begin{cases} x + by - 2z = 1 \\ 3by - 3z = 3 \\ 0 = b + 2 \end{cases}$$

Si $b \neq -2$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $b = -2$ alors

$$\begin{cases} x = -1 - 2y \\ z = -1 - 2y \end{cases}$$

Exercice 53 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires : $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \ldots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient le

système équivalent :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{S} = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$$

Exercice 54 : [énoncé]

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, x_2 = -x_1, x_3 = 0 \\ x_4 = x_1, x_5 = -x_1, x_6 = 0 \\ \ldots \\ x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \quad [3] \\ x_1 & \text{si } n = 1 \quad [3] \\ -x_1 & \text{si } n = 2 \quad [3] \end{cases} \\ \ldots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Donc si $n \neq 2 \quad [3]$ alors

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$$

et si $n = 2 \quad [3]$ alors

$$\mathcal{S} = \{(x, -x, 0, x, -x, 0, \ldots, x, -x)/x \in \mathbb{C}\}$$

Exercice 55 : [énoncé]
Le problème revient à résoudre le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}$$

$(n) \leftarrow (n) - (1)$ donne

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n - z_2 = 2a_n - 2a_1 \end{cases}$$

$(n) \leftarrow (n) + (2)$ donne

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_3 = 2(a_n - a_1 + a_2) \end{cases}$$

etc.
On obtient au final

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ (1 - (-1)^n)\, z_n = 2\left(a_n - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_{n-1}\right) \end{cases}$$

On peut alors conclure :
- Si n est impair, le système est de Cramer et donc possède une solution unique.
- Si n est pair alors le système possède une solution si, et seulement si,

$$a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n = 0$$

Exercice 56 : [énoncé]

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ b(a-2)y + (2-a)z = b - 1 \\ (a-2)x + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

Si $a = 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + 2z = 1 \\ 0 = b - 1 \end{cases}$$

Dans le cas $b \neq 1$, le système est incompatible.
Dans le cas $b = 1$, on parvient à l'équation $2x + 2y + 2z = 1$.

Si $a \neq 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ by - z = \dfrac{b-1}{a-2} \\ x - z = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} (a+4)z = \dfrac{a-2b}{a-2} \\ by = z + \dfrac{b-1}{a-2} \\ x = z \end{cases}$$

Dans le cas $a = -4$, le système n'est compatible que si $b = -2$ et on parvient au système

$$\begin{cases} x = z \\ -4y = 2z + 1 \end{cases}$$

Dans le cas $b = 0$, le système est incompatible.
Dans le cas général restant, on parvient à

$$x = z = \frac{a-2b}{(a-2)(a+4)},\ y = \frac{ab+2b-4}{b(a-2)(a+4)}$$

Exercice 57 : [énoncé]
Le déterminant de ce système carré est $(a-1)^3(a+3)$.
Cas $a = 1$:
Le système est compatible si, et seulement si, $b = 1$ et ses solutions sont les quadruplets (x, y, z, t) vérifiant

$$x + y + z + t = 1$$

Cas $a = -3$:
En sommant les quatre équations, on obtient l'équation de compatibilité $0 = 1 + b + b^2 + b^3$.
Si $b \notin \{i, -1, -i\}$ alors le système est incompatible.
Si $b \in \{i, -1, -i\}$ alors le système équivaut à

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ x + y - 3z + t = b^2 \\ x + y + z - 3t = b^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ 4y - 4z = b^2 - b \\ 4y - 4t = b^3 - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^3 \\ z = y + \frac{1}{4}(b - b^2) \\ t = y + \frac{1}{4}(b - b^3) \end{cases}$$

ce qui permet d'exprimer la droite des solutions.
Cas $a \notin \{1, -3\}$:
C'est un système de Cramer...
Sa solution est

$$x = \frac{2 + a - b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, y = \frac{ab - 1 + 2b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2},$$

$$z = \frac{ab^2 - 1 - b + 2b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, t = \frac{ab^3 - 1 - b - b^2 + 2b^3}{2a - 3 + a^2}$$