

### **Exercice 1 :**

Une urne contient dix boules rouges et cinq boules vertes.

1. On pioche six boules avec remise. On note  $R$  (resp.  $V$ ) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.  
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $R$  (resp.  $V$ ). Les variables  $R$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?
2. On pioche les boules sans remise. On note  $X_R$  le nombre de pioches nécessaires pour obtenir la première boule rouge. Donner la loi de  $X_R$ .

### **Exercice 2 :**

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est  $p = 1/4$ .

Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit  $X$  le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de  $X$ . Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

### **Exercice 3 :**

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement  $n$  boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit  $X_n$  le nombre de boules blanches et  $Y_n$  le nombre de points obtenus.

Déterminer la loi de  $X_n$ , puis  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$ .

Exprimer  $Y_n$  en fonction de  $X_n$ . En déduire la loi de  $Y_n$ , puis  $E(Y_n)$  et  $V(Y_n)$ .

### **Exercice 4 :**

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées  $0, 1, 2, \dots$ , de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0.

La puce a effectué  $n$  sauts.

Soit  $X_n$  le numéro de la case occupée par la puce .

Soit  $Y_n$  le nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case.

Donner la loi de  $Y_n$ ,  $E(Y_n)$  et  $V(Y_n)$ .

Exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$  et  $n$ . En déduire  $E(X_n)$  et  $V(X_n)$  puis la loi de  $X_n$ .

### **Exercice 5 :**

Un dé  $D$  comporte 20 faces marquées dont 7 faces sont numérotées 1, 8 faces sont numérotées 2, 5 faces sont numérotées 3.

Soit  $n$  un entier non nul. On lance  $n$  fois le dé  $D$  et on note  $X_n^{(i)}$  le nombre de faces numérotées  $i$  au cours des  $n$  lancers.

1. Donner la loi de  $X_n^{(1)}$ ,  $X_n^{(2)}$ ,  $X_n^{(3)}$  ainsi que leurs espérances et leurs variances.
2. Les deux variables aléatoires  $X_n^{(1)}$  et  $X_n^{(2)}$  sont-elles indépendantes ?
3. Lors des  $n$  lancers, pour chaque face numéro 1 (resp. 2, 3) obtenue on gagne 1 euro (resp. -2 euros, resp.  $a$  euros). Pour quelle valeur de  $a$ , le gain moyen du jeu est positif en moyenne ?  
( ça existe en fait une infinité de valeurs )

### **Exercice 6 :**

Une secrétaire effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants distincts ( $n \geq 2$ ). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  appartenant à  $]0, 1[$  et la probabilité de ne pas l'obtenir est  $q$ , avec  $q = 1 - p$ .

1. Soit  $X$  le nombre de correspondants obtenus lors de ces  $n$  appels. Quelle est la loi de  $X$ ? Calculer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .
2. Après ces  $n$  recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des  $n - X$  correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit  $Y$  le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et  $Z = X + Y$  le nombre total de correspondants obtenus.
  - (a) Quelles sont les valeurs prises par  $Z$ ?
  - (b) Calculer  $p_0 = P(Z = 0)$ ,  $p_1 = P(Z = 1)$ . Montrer que  $p_1 = npq^{2n-2}(1+q)$ .
  - (c) Calculer  $P_{(X=k)}(Y = h)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $h \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$ .
  - (d) Démontrer  $P(Z = s) = \sum_{k=0}^s P((X = k) \cap (Y = s - k))$ .
  - (e) Calculer  $P(Z = s)$ , vérifier que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s} \binom{s}{k}$ .  
En déduire que  $P(Z = s) = C_n^s [p(1+q)]^s (q^2)^{n-s}$ .
  - (f) Montrer que  $p(1+q) = 1 - q^2$  et reconnaître la loi suivie par  $Z$ .

### **Exercice 7 :**

Une boîte  $A$  contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte  $B$  contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération  $n$  fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$ . Pour cela, on introduit les évènements :

- $P_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 0 "
- $Q_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 1 "
- $R_n$  : " la somme des jetons contenus dans l'urne  $A$  à l'instant  $t = n$  vaut 2 "

On pose également  $p_n = P(P_n)$ ,  $q_n = P(Q_n)$  et  $r_n = P(R_n)$ .

1. Calculer  $p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1$ .
2. Exprimer  $p_{n+1}$  (resp.  $q_{n+1}$ , resp.  $r_{n+1}$ ) en fonction de  $p_n, q_n, r_n$ .
3. Montrer que  $\forall n \geq 0, \quad q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n$ .
4. En déduire l'expression de  $q_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $p_n$  et de  $r_n$ .
5. Déterminer les limites des trois suites. Interprétation.