(Fonction gamma d'Euler)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \textit{ converge } \Leftrightarrow x > 0$$

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

2) Vérifier que $\Gamma(1) = 1$.

3) i) Montrer que

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ii) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

4) Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

5) i) Montrer que

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ la\ fonction\ t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\ est\ integrable\ sur\ ]0, +\infty[$$

ii) Montrer alors que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}dt$$

iii) Justifier que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Solution

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux (CPM) sur $]0,+\infty[$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ convergent

Au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(t^{x-1}e^{-t}) = 0$ (croissance comparée)

$\Rightarrow t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge. $\square$

Au voisinage de 0

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt \text{ CV } \left(\text{car positives}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-x<1 \quad (\text{Riemann})$$

$$\Leftrightarrow x>0$$

Enfin : $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge $\Leftrightarrow x>0$

$\square$

---

2) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

---

3) i) Soit $x>0$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{x}\left(-e^{-t}\right)'dt$$

Or $t\mapsto t^x$ et $t\mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et que

$\lim\limits_{t\to 0} t^x.(-e^{-t}) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x.(-e^{-t}) = 0$ (existent et finies)

Alors on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_0^{+\infty} t^{x}\left(-e^{-t}\right)'dt = \underbrace{\left[t^x.(-e^{-t})\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{=x\,\Gamma(x)}$$

D'où $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ □

3) ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$?

Par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1$.

$\Gamma(1) = 1 = 0!$
(2.i)

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supp que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et M.q. $\Gamma(n+1) = n!$

On a $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ (3/i)

$= n.(n-1)!$ (Hyp de récurr)

$= n!$

D'où le résultat voulu. □

4) M.q. Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

Notons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$, pour tout $t \in]0,+\infty[$ et $x \in]0,+\infty[$.

$\forall x>0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$.

Il suffit de vérifier les points suivants :

a) $\forall x \in]0,+\infty[,\ t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$.
b) $\forall t \in]0,+\infty[,\ x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
c) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
Il existe une fonction φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, telle que :
$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0,+\infty[,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$

a) et b) sont claires, par opérations sur les fonctions continues ou CPM.

Pour c)

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Soient $x \in [a,b]$ et $t \in]0,+\infty[$.

$$|f(x,t)| = t^{x-1} e^{-t}$$

$$= e^{(x-1)\ln t} \cdot e^{-t} \leqslant ?$$

On a $a-1 \leqslant x-1 \leqslant b-1$ et on veut multiplier par $\ln t$.

Alors la majoration qui nous interesse dépend du signe de $\ln t$.

On a : $\begin{cases} \text{Si } t \in]0,1], & (x-1)\ln t \leqslant (a-1)\ln t \\ \text{Si } t \in]1,+\infty[, & (x-1)\ln t \leqslant (b-1)\ln t \end{cases}$

Ainsi, $\begin{cases} \forall t \in]0,1], \ |f(x,t)| = e^{(x-1)\ln t} e^{-t} \leqslant e^{(a-1)\ln t} e^{-t} = t^{a-1} e^{-t} \\ \forall t \in]1,+\infty[, \ |f(x,t)| = e^{(x-1)\ln t} e^{-t} \leqslant e^{(b-1)\ln t} e^{-t} = t^{b-1} e^{-t} \end{cases}$

On veut la majoration pour tout $t \in]0,+\infty[$:

On a :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \ |f(x,t)| \leqslant t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}$$

Notons $\varphi(t) = t^{a-1} e^{-t} + t^{b-1} e^{-t}$. On a alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in [a,b], \ \forall t \in]0,+\infty[, \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \\ \varphi \text{ est CPM et intégrable sur }]0,+\infty[\end{array}}$$

$\square$

5) i)

Soient $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Mq que la fonction $t\mapsto(\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Càd que $\int_0^{+\infty}|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge.

La fonction est d'abord CPM sur $]0,+\infty[$ (continue même).

__Au voisinage de $+\infty$:__

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\left(|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t}\right)=0 \quad \text{(croissance comparée)}$$

D'où $|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ CV alors $\int_1^{+\infty}|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ CV $\square$

__Au voisinage de 0 :__

$$|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to0}{\sim}|\ln t|^n t^{x-1}=\frac{1}{|\ln t|^{-n}t^{1-x}}$$

D'où $\int_0^1|\ln t|^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ CV $\iff\int_0^1\frac{1}{|\ln t|^{-n}t^{1-x}}\,dt$ CV

Car les deux fonctions sont __positives__.

Vérifions maintenant que $\int_0^1\frac{1}{|\ln t|^{-n}t^{1-x}}\,dt$ CV :

On pense au réflexe sur les intégrales de Bertrand (hors programme je rappelle, mais la technique est à retenir).

On a $1-x<1$.

Soit alors $1-x<\alpha<1$.

On a $\lim_{t\to0}t^\alpha\cdot\frac{1}{|\ln t|^{-n}t^{1-x}}=\lim_{t\to0}|\ln t|^n t^{\overbrace{\alpha-(1-x)}^{>0}}=0$, par croissance comparée au voisinage de 0.

D'où $\dfrac{1}{|\ln t|^{-n} t^{1-x}} \underset{t \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}}\right)$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ converge (Riemann et $\alpha < 1$)

Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|\ln t|^{n}\, t^{1-x}}\,dt$ CV

Et donc $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^n t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge. $\square$

En fin, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ln t|^n t^{x-1} e^{-t}\,dt \text{ converge.}}$

---

5) ii) Montrons que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Renotons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$, pour tout $t \in]0,+\infty[$ et $x \in]0,+\infty[$.

$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$.

Il s'agit de vérifier les points suivants :

A) $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

B) $\forall x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$.

C) $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall n \geq 1$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ CPM sur $]0,+\infty[$.

D) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $n \geq 1$.

Il existe une fonction φ CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que :

$\left(\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq \varphi(t)\right)$

A) par opérations sur les fonctions de classe C^∞.

B) Vue dans 1°)

C) Soient $x > 0$ et $n \geq 1$.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{(n)}$$

$$= e^{-t}\left(e^{(x-1)\ln t}\right)^{(n)}$$

$$= e^{-t}.(\ln t)^n e^{(x-1)\ln t}$$

$$= (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$$

et $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}$ est CPM sur $]0,+\infty[$

D) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $n \geq 1$.

Soient $x \in [a,b]$ et $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = |\ln t|^n t^{x-1} e^{-t}$$

$$\leq \underbrace{|\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^{b-1} e^{-t}}_{\text{notée } \varphi(t)}$$

φ est CPM et intégrable sur $]0,+\infty[$, comme somme de deux fonctions intégrables d'après 5)i).

Ainsi, Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x>0,\ \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

$\square$

5) iii) Γ est convexe sur $]0,+\infty[$; en effet :

Γ est C^∞ sur $]0,+\infty[$, (donc deux fois dérivable)

et on a ;

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}}_{\geqslant 0} dt \geqslant 0$$

D'où Γ est convexe sur $]0,+\infty[$. $\square$