$\boxed{\text{Problème}}$

1) a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A^p = 0$.
Montrer que $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse en fonction des puissances de A .

b) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse (sous forme de tableau matriciel).

2) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^2 - 3M$ en fonction de I_3.

b) En déduire que M est inversible et déterminer son inverse en fonction de M (sous forme de tableau matriciel).

c) Donner M^{-1} sous forme de tableau matriciel.

d) Montrer <u>par récurrence sur n</u> que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$

e) Montrer l'unicité du couple (α_n, β_n).

f) Trouver le reste de la division euclidienne de X^n *par* $X^2 - 3X + 2$.

g) En déduire les valeurs de α_n *et* β_n.

3) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i$ tel que $P(M) = 0$ et que $P(0) \neq 0$. (s entier naturel non nul fixé)
Montrer que M est inversible et déterminer son inverse en fonction des puissances de M et des coefficients de P.

4) a) Notons $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Calculer J^2 en fonction de J et n.

b) Supposons que $n \geq 2$. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots 1 & & 0 \end{pmatrix}$ de $M_n(K)$ est inversible et déterminer son inverse.