Espaces Prehilbertiens Réels

Pr. ELAMIRI

E sera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou non)

I) Généralités

1) Produit scalaire

Déf 1

On appelle produit scalaire sur E toute application ϕ de $E\times E$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall x, x' \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \phi(\alpha x + x', y) = \alpha\phi(x,y) + \phi(x',y)$

« ϕ est dite linéaire par rapport à la $1^{\text{ère}}$ place »

2) $\forall x \in E, \forall y, y' \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \phi(x, \alpha y + y') = \alpha\phi(x,y) + \phi(x,y')$

« ϕ est dite linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place »

3) $\forall x, y \in E, \ \phi(x,y) = \phi(y,x)$

« ϕ est dite symétrique »

4) $\forall x \in E\setminus\{0\}, \ \phi(x,x) > 0$

« ϕ est dite définie positive »

RQ 1

1) et 2) font de ϕ une forme bilinéaire sur E.

RQ 2

Un produit scalaire est ainsi une forme bilinéaire symétrique définie positive.

RIR 3

$$\left(\begin{array}{l}\phi \text{ est une forme bilinéaire} \\ \text{symétrique}\end{array}\right) \iff \begin{cases}\phi \text{ linéaire par rapport à la } 1^{\text{ère}} \text{ place} \\ \phi \text{ est symétrique}\end{cases}$$

Démo de RIR 3

($\Longrightarrow$) OK

($\Longleftarrow$) ϕ linéaire par rapport à la $2^{\text{ème}}$ place ?

$$\begin{aligned}\phi(x, \alpha y + y') &= \phi(\alpha y + y', x) \quad (\phi \text{ sym}) \\ &= \alpha\phi(y, x) + \phi(y', x) \quad (\phi \text{ lin par rapport à la } 2^{\text{ème}} \text{ place}) \\ &= \alpha\phi(x, y) + \phi(x, y') \quad (\phi \text{ sym})\end{aligned}$$

$\square$

RIR 4

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique. On a :

$$\phi \text{ définie positive} \iff \begin{cases} i) & \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \\ ii) & \forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0\end{cases}$$

Démo de RIR 4

($\Longrightarrow$)

i) $\forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0$?

Si $x \neq 0$, $\phi(x,x) > 0 \Rightarrow \phi(x,x) \geq 0$

Si $x = 0$, $\phi(x,x) = \phi(0,0)$

$= 0 \geq 0$ (ϕ lin par rapport à la $1^{\text{ère}}$ place)

ii) $\phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$?

Par contraposée, on m que : $(x \neq 0 \Rightarrow \phi(x,x) \neq 0)$

Ce qu'on a, car $x \neq 0 \Rightarrow \phi(x,x) > 0$

$\Rightarrow \phi(x,x) \neq 0$

$\square$

$(\Leftarrow)$

Soit $x \neq 0$. M.q. $\phi(x,x) > 0$

On a $x \neq 0 \Rightarrow \phi(x,x) \neq 0$

Or $\phi(x,x) \geq 0$, alors $\phi(x,x) > 0$ $\square$

Prop 2

$\left(\begin{array}{l}\phi \text{ est un produit} \\ \text{scalaire sur } E\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \phi \text{ est symétrique} \\ 2)\ \phi \text{ est linéaire par rapport à la } 1^{ère} \text{ place} \\ 3)\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \\ 4)\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

Démo Vient de ce qui précède.

Notations

Soit ϕ un produit scalaire sur E.

$\phi(x,y)$ se note par l'une notations suivantes :

$\langle x|y\rangle$ ou $\langle x,y\rangle$ ou $(x|y)$ ou $x.y$

Exemples rapides

Développer les produits scalaires suivants :

$\langle x+y|x+y\rangle$; $\langle x-y|x-y\rangle$; $\langle x+2y|x-3y\rangle$

Produits scalaires usuels : (à savoir démontrer)

a) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Produit scalaire usuel sur $C([a,b],\mathbb{R})$

Pour f et $g \in C([a,b],\mathbb{R})$. $(a<b \in \mathbb{R})$.

$$\langle f | g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

c) Produit scalaire usuel sur $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques.

Pour f et $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\langle f | g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

d) Produit scalaire usuel sur $M_{n1}(\mathbb{R})$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\langle X | Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $M_{n1}(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\boxed{\langle X | Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX \cdot Y}$$

e) Produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B\rangle = tr({}^tA \cdot B)$$

$\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\boxed{\langle A|B\rangle = tr({}^tA \cdot B) = \sum_{1\leq i,j\leq n} A_{ij}\, B_{ij}}$$

où $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$

Déf 3

1) Un $\mathbb{R}$-esp vect muni d'un produit scalaire s'appelle espace préhilbertien réel.

2) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle espace euclidien.

Par exemple

1) $(C([a,b],\mathbb{R}), \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un esp préhilb réel.

2) $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace euclidien.

Notations et vocabulaire

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilb réel.

1) Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Noter que c'est défini, car $\langle x|x\rangle \geq 0$.

2) L'application $\|\ \|: E \to \mathbb{R}^+ ; x \mapsto \|x\|$ s'appelle la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

3) Soient $x, y \in E$.

$\|x-y\|$ se note $d(x,y)$, et s'appelle la distance entre x et y.

Prop 4

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un evp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle$

6) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y\rangle$

Démo

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x\rangle}$

$$= \sqrt{\lambda^2 \langle x|x\rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2}\ \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

$$= |\lambda| . \|x\|$$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$: Voir plus tard

5) $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle$

$$= \langle x|x\rangle + 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$$

6) Idem.

Prop 5

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x,y) = d(y,x)$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Démo

1) $d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x)$
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$
3) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \underbrace{\|x-z\|}_{d(x,z)} + \underbrace{\|z-y\|}_{d(z,y)}$

Lemme

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$

alors $\Delta \leqslant 0$; où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Démo (En bref)

Raisonnons par l'absurde, et supp que $\Delta > 0$.

Alors on aurait deux racines réelles distinctes x_1 et x_2.

Et par suite, on aura le tableau de signe :

« supposons par exemple $x_1 < x_2$ »

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+sg(a)$	0	$-sg(a)$	0	$+sg(a)$

Alors ax^2+bx+c change de signe sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. $\square$

Prop 6 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$ (c'est l'ICS)

2) $\langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \iff (x, y)$ liée

NB :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$\boxed{\langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2}$ ou encore $\boxed{|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|}$

Démo

1) $\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$?

On a : $(\forall t \in \mathbb{R}, \|x + ty\|^2 \geq 0)$ (la clé)

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|x\|^2 + 2\langle x|ty \rangle + \|ty\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|y\|^2 t^2 + 2t\langle x|y \rangle + \|x\|^2 \geq 0$

Pensons à utiliser le lemme.

Cas 1 : Si $\|y\|^2 \neq 0$ (càd $y \neq 0$)

Alors $\Delta = (2\langle x|y \rangle)^2 - 4\|y\|^2 . \|x\|^2 \leq 0$

Càd $\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$ $\square$

Cas 2 : Si $\|y\|^2 = 0$ (càd $y = 0$)

On a $\begin{cases} \langle x|y \rangle^2 = \langle x|0 \rangle^2 = 0 \\ \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle = \langle x|x \rangle \langle 0|0 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$ $\square$

2) $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle \iff x$ et y sont colinéaires.

$(\Leftarrow)$

Supp par exemple $x = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\begin{cases} \langle x|y\rangle^2 = \langle \lambda y|y\rangle^2 = \lambda^2 \langle y|y\rangle^2 \\ \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle = \langle \lambda y|\lambda y\rangle\langle y|y\rangle = \lambda^2 \langle y|y\rangle^2 \end{cases}$

D'où $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$ $\square$

$(\Rightarrow)$

Supp que $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$, et M que x et y colinéaires

Cas 1 : Si $\|y\|^2 \neq 0$ (càd $y \neq 0$)

Alors $\Delta = (2\langle x|y\rangle)^2 - 4\|y\|^2 . \|x\|^2 = 0$

D'où l'équation $\boxed{\|y\|^2 t^2 + 2t\langle x|y\rangle + \|x\|^2 = 0}$ d'inconnue

t admet une unique solution réelle t_0.

$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, \|y\|^2 t_0^2 + 2t_0\langle x|y\rangle + \|x\|^2 = 0$

$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, \|x + t_0 y\|^2 = 0$

$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, x + t_0 y = 0$

D'où x et y sont colinéaires $\square$

Cas 2 : Si $\|y\|^2 = 0$ (càd $y = 0$)

$y = 0 \Rightarrow (x, y)$ liée ; càd x et y colinéaires

Fin démo

$\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle \to$ ICS

Par exemple

1) $\forall f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\times\left(\int_a^b g^2\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

En particulier :

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2)$$

Exercices d'applications

Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall n \geqslant 1$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

2) $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$, $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$

3) Pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, avec $f>0$, on a :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\times\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

Solution

1) $\forall n \geqslant 1$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$?

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\times\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)}_{=n}$$

2) $\forall f\in C([0,1],\mathbb{R}),\ \left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$?

$$\boxed{\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\times\left(\int_a^b g^2\right)}$$

$$\left(\int_0^1 f\right)^2 = \left(\int_0^1 f\times 1\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)\times\underbrace{\left(\int_0^1 1^2\right)}_{=1}$$

3) Pour tout $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, avec $f>0$, M que :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\times\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

$$\boxed{\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\times\left(\int_a^b g^2\right)}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f\right)\times\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) &= \left(\int_a^b (\sqrt{f})^2\right)\times\left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right)\\ &\geqslant \left(\int_a^b \left(\sqrt{f}\times\frac{1}{\sqrt{f}}\right)\right)^2\\ &= \left(\int_a^b 1\right)^2\\ &= (b-a)^2\end{aligned}$$

□

Corollaire 7 (L'inégalité triangulaire)

Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un evp préhilb réel. On a :

$$\forall x,y\in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$$

Démo

Faisons un raisonnement par équivalence. On a :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| \iff (\|x+y\|)^2 \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\iff \cancel{\|x\|^2}+\cancel{\|y\|^2}+2\langle x|y\rangle \leqslant \cancel{\|x\|^2}+\cancel{\|y\|^2}+2\|x\|\cdot\|y\|$$

$$\iff \langle x|y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|$$

Ce qui est vrai, car :

$$\langle x|y\rangle \leq |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

$\hookrightarrow$ d'après l'inég de C-schw $\square$

Prop 8

Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel. Soient $x,y \in E$, on a :

1) $\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

« l'identité de polarisation »

2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

« l'identité du parallelogramme »

Démo

On a $\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle \implies 1°) \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y\rangle \end{cases}$

Par sommation on obtient 2°). $\square$

---

2) Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soient $x,y \in E$.

x et y sont dits **orthogonaux** si et ssi $\langle x|y\rangle = 0$.

Déf 2

Soient $A \subset E$ et $x \in E$.

x est dit **orthogonal à A** si et ssi x est orthogonal à tout élément de A.

Notation

$A^{\perp}$: l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A.

$$x \in A^{\perp} \underset{\text{par définition}}{\Longleftrightarrow} (\forall a \in A, \langle x|a\rangle = 0)$$

Prop 3

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0\rangle = 0$

ii) $\{0\}^{\perp} = E$

2) i) $(\forall x \in E, \langle a|x\rangle = 0) \overset{S!}{\Longleftrightarrow} a = 0$

ii) $E^{\perp} = \{0\}$

Démo

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0\rangle = 0$?

$$\langle x|0\rangle = \langle x|0.0\rangle$$
$$= 0.\langle x|0\rangle$$
$$= 0$$

ii) $\{0\}^{\perp} = E$?

" $\subset$ " évidente

" $\supset$ "

On a : $(\forall x \in E, \langle x|0\rangle = 0)$

$\Rightarrow \forall x \in E, x \in \{0\}^{\perp}$

$\Rightarrow E \subset \{0\}^{\perp}$

2) i) $(\forall x \in E, \langle a|x\rangle = 0) \Longleftrightarrow a = 0$

$(\Leftarrow)$ (c'est 1) i))

$(\Longrightarrow)$

Supp que $(\forall x \in E, \langle a|x\rangle = 0)$ et Mque $a=0$.

En particulier pour $x=a$, on a $\langle a|a\rangle = 0$

D'où $a=0$

Prop 4

Soit $A \subset E$.

$A^\perp$ est un sev de E.

Démo

1) $0 \in A^\perp$ (car $\forall a \in A, \langle 0|a\rangle = 0$)

2) Soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Mque $(\lambda x + y) \in A^\perp$.

Soit alors $a \in A$. Mque $\langle \lambda x + y | a\rangle = 0$.

On a :

$$\langle \lambda x + y | a\rangle = \lambda \langle x|a\rangle + \underbrace{\langle y|a\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{de même}}} = 0$$

$\langle x|a\rangle = 0$ car $x \in A^\perp$ et $a \in A$

$\square$

Déf 5

Soient F et G deux sev de E.

F et G sont dits orthogonaux si et ssi tout élément de F est orthogonal à tout élément de G.

Autrement dit

(F et G sont dits orthogonaux) $\Longleftrightarrow (\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x|y\rangle = 0)$

Prop 6

Soient F et G deux sev de E.

1) $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$

2) Les propositions suivantes sont orthogonales :

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^{\perp}$

iii) $G \subset F^{\perp}$

Démo

1) $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$?

Supp que $F \subset G$, et M.q. $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Soit alors $x \in G^{\perp}$. M.q. $x \in F^{\perp}$.

Soit $a \in F$. M.q. $\langle x | a \rangle = 0$.

On a $a \in F$ et $F \subset G$, alors $a \in G$.

Ainsi $\begin{cases} a \in G \\ x \in G^{\perp} \end{cases}$

D'où $\langle x | a \rangle = 0$

2) On a :

i) $\Leftrightarrow$ ii)

F et G sont orthogonaux $\iff \forall x \in F, \forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$

$\iff \forall x \in F, x \in G^{\perp}$

$\iff F \subset G^{\perp}$

ii) $\Leftrightarrow$ iii)

F et G sont orthogonaux $\iff \forall x \in F, \forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$

$\iff \forall y \in G, \forall x \in F, \langle x | y \rangle = 0$

$\iff \forall y \in G, y \in F^{\perp}$

$\Leftrightarrow G\ CF^{\perp}$ $\square$

3) Famille orthogonale

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Un vecteur x de E est unitaire si et ssi $\|x\| = 1$

NB :

1) x unitaire $\Rightarrow x \neq 0$

2) Si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Déf 2

1) Une famille de vecteurs de E est dite famille orthogonale si et ssi ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

2) Une famille de vecteurs de E est dite famille orthonormale si et ssi elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont unitaires.

Prop 3

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

1) $\mathcal{F}$ est orthogonale $\Leftrightarrow (\forall i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle = 0)$

2) $\mathcal{F}$ est orthonormale $\Leftrightarrow (\forall i, j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij})$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$: le symbole de Kronecker.

Démo Claire

Vocabulaire Une f^{lle} orthonormale est dite aussi orthonormée.

Prop 4

1) Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

2) Toute famille orthonormale est libre.

Démo :

1) Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une f^{lle} orthogonale telle que :

$(\forall i, x_i \neq 0)$.

Mq que $\mathcal{F}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$.

Mq que : $(\forall k \in [\![1,p]\!], \lambda_k = 0)$.

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Mq que $\lambda_k = 0$.

On a $\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_k \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x_i | x_k \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k \underbrace{\langle x_k | x_k \rangle}_{\substack{\neq 0 \\ \text{car } x_k \neq 0}} = 0 \quad \left(\text{car } \forall i \neq k, \langle x_i | x_k \rangle = 0\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

2) Vient de 1) $\square$

Prop 5

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle$$

C'est en général FAUX !!

Démo

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} y_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \left\langle e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} y_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} y_j \langle e_i | e_j \rangle \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

$\square$

Prop 6

$\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

Soient $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

1) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, on a :

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \|e_i\|^2$$

2) Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, on a :

S! i) $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$

ii) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Démo : Vient de la prop 5.

Vocabulaire

Si une base de E est une famille orthonormale, on dit tout court qu'elle est une base orthonormale (bon).
On l'appelle aussi base orthonormée.

Prop 7

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E.

$$\boxed{\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ alors } (\forall i, x_i = \langle x | e_i \rangle)}$$

Démo :

Supp $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$\begin{aligned}
\forall 1 \leq k \leq n, \ \langle x | e_k \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | e_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i | e_k \rangle \\
&= x_k \langle e_k | e_k \rangle \qquad (\forall i \neq k, \langle e_i | e_k \rangle = 0) \\
&= x_k \qquad \langle e_k | e_k \rangle = \|e_k\|^2 = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Prop 8 (Théorème de Pythagore)

1) Soient $x, y \in E$, on a :

$(x$ et y orthogonaux$) \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

2) Soit $n \geq 2$.

$(x_1, \dots, x_n)$ famille orthogonale $\Rightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Démo

1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\langle x|y\rangle = \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2}$

$\Leftrightarrow \langle x|y\rangle = 0$.

2) Par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation :

Pour $n=2$; c'est 1°)

Hérédité

Soit $n \geq 2$.

Supp que la proposition est vraie pour n, et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit alors $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille orthogonale, et m.que :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$$

On a :

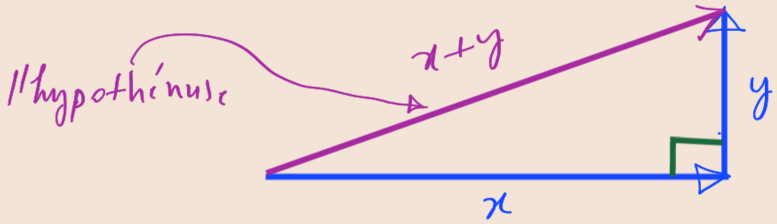
$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right\|^2$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad \left(\text{d'après 1°), et que } x_{n+1} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ sont orthogonaux}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad (\text{l'hypoth de récurr})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$$

Schéma



Ça rappelle le thm de Pythagore vu au collège.

Attention

Dans 2), La réciproque est en général fausse pour $n \geq 3$.

Contre-exemple :

$E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel.

$x = (1,0)$; $y = (-1,1)$; $z = (1,1)$.

On a $\underbrace{\|x+y+z\|^2}_{=5} = \underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2}_{=5}$ (faites vos calculs)

et pourtant la famille (x,y,z) n'est pas orthogonale

car $\langle x|y\rangle = -1 \neq 0$

4) Procédé d'orthonormalisation de Gram_Schmidt

Prop 1

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$x \in \left(\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)\right)^{\perp} \Leftrightarrow \left(\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x|e_i\rangle = 0\right)$$

Démo

$(\Rightarrow)$

Claire, car $e_i \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)$

$(\Leftarrow)$

Supp que : $\left(\forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x|e_i\rangle = 0\right)$.

Mq que $x \in \left(\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)\right)^{\perp}$.

Soit $y \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p)$. Mq que $\langle x|y\rangle = 0$

On a $y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Alors :

$$\langle x|y\rangle = \langle x | \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underbrace{\langle x|e_i\rangle}_{=0}$$

$$= 0$$

$\square$

Lemme

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale.

Soit $x \in E$. On a :

$$\left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i \right) \in \left(\mathrm{vect}(e_1, \dots, e_p) \right)^{\perp}$$

Démo

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Mq que

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i \,\middle|\, e_k \right\rangle = 0$$

On a :

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i \,\middle|\, e_k \right\rangle = \langle x|e_k\rangle - \overbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i \,\middle|\, e_k \right\rangle}^{= \langle x|e_k\rangle \text{ car } (e_i) \text{ f}^{\text{lle}} \text{ orthonormée}}$$

$$= \langle x|e_k\rangle - \langle x|e_k\rangle$$

$$= 0$$

$\square$

Ce lemme permet de montrer le principe d'orthonormalisation de Gram – Schmidt suivant :

Prop 2 (Principe d'orthonormalisation de Gram – Schmidt)

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E.

A) Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \star\ \forall\, 1 \leq i \leq p,\ \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) \\ \star\ \forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x_i | e_i \rangle > 0 \end{array}}$$

B) Cette famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ s'obtient par le procédé de Gram – Scmidt suivant : (Procédé à retenir !)

Étape 1 $\quad e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Étape 2 $\quad \begin{cases} U_2 = x_2 - \langle x_2 | e_1 \rangle e_1 \\ e_2 = \dfrac{U_2}{\|U_2\|} \end{cases}$

Étape 3 $\quad \begin{cases} U_3 = x_3 - \left(\langle x_3 | e_1 \rangle e_1 + \langle x_3 | e_2 \rangle e_2 \right) \\ e_3 = \dfrac{U_3}{\|U_3\|} \end{cases}$

$\vdots$

Étape p $\quad \begin{cases} U_p = x_p - \left(\langle x_p | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_p | e_{p-1} \rangle e_{p-1} \right) \\ e_p = \dfrac{U_p}{\|U_p\|} \end{cases}$

Corollaire 3

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E (E étant esp euclid de dim n), Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$, construite via le procédé de Gram-Schmidt, est une bon de E.

Démo

On a $\underbrace{\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)}_{=E} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

$\Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ f^{lle} génératrice de E.

Or $\text{Card}(e_1, \dots, e_n) = n = \dim(E)$

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Étant une f^{lle} orthonormale, $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une bon de E.

Corollaire 4 (Existence d'une bon dans un esp euclidien)

Tout espace euclidien possède au moins une bon.

Démo

Vient du Corollaire 3.

Exercice :

$E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire usuel :

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1) $(1, X)$ est-elle une bon de E ?

2) Construire une bon de E.

Solution

1) $(1, X)$ est-elle une bon de E ?

Non, car $\langle 1 | X \rangle = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} \neq 0$

2) Construire une bon de E.

On construit (E_1, E_2) via le procédé de Gram-Sch à partir de la base $(1, X)$. Ça sera une bon de E.

$$E_1 = \frac{1}{\|1\|} \quad ; \|1\| = 1$$

$$\boxed{\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt \qquad \|P\| = \left(\int_0^1 P^2(t)\,dt\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{E_1 = 1}$$

$E_2 = ?$

$$U_2 = X - \langle X|E_1\rangle . E_1$$

$$\langle X|E_1\rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

D'où $U_2 = X - \frac{1}{2}$

$$\|U_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3\times 4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \sqrt{3}(2X - 1)$$

(E_1, E_2) est une bon de $E = \mathbb{R}_1[X]$, où :

$$\begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = \sqrt{3}(2X-1) \end{cases}$$

Corollaire 5

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ esp préhilbertien réel.

Tout sev de dimension finie de E possède une bon.

Prop 6

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ esp préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E. On a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Démo

1) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$?

Soit $x \in F \cap F^{\perp}$. Mq que $x = 0$.

On a $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall a \in F, \langle x|a\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x|x\rangle = 0$ (on prend $a = x \in F$)

$\Rightarrow x = 0$

2) Soit $x \in E$.

Mq qu'il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in F^{\perp}$ tels que $x = u_1 + u_2$.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une bon de F.

On a $\left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i\right) \in (\text{vect}(e_1, \ldots, e_p))^{\perp}$

D'autre part, on a :

$$x = \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i\right)}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle e_i\right)}_{\in F}$$

□

Notation

Soient E un espace préhilbertien et F un sev de E.

$(F^{\perp})^{\perp}$ se notera $F^{\perp\perp}$.

Prop 7

Soient E un espace euclidien de dim n et F un sev de E. On a :

1) $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$

2) $F^{\perp\perp} = F$

Démo

1) $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$?

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ alors $\underbrace{\dim(E)}_{=n} = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$

2) $F^{\perp\perp} = F$?

On a $x \in F^{\perp\perp} \iff (\forall a \in F^{\perp},\ \langle x | a \rangle = 0)$

D'où $(\forall x \in F,\ x \in F^{\perp\perp})$

Càd $F \subset F^{\perp\perp}$.

D'autre part, on a $\dim(F^{\perp\perp}) = n - \dim(F^{\perp}) = \dim F$

D'où $F^{\perp\perp} = F$ $\square$

Prop 8

E esp euclidien.

1) Supp que $E = F \oplus F^{\perp}$

Si : B_1 bon de F et B_2 bon de $F^{\perp}$

Alors $B_1 \cup B_2$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$

2) En général, supp que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où les F_i sont deux à deux orthogonaux.

Si $B_1, \dots, B_p$ des bon respectives de $F_1, \dots, F_p$

Alors $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Démo

1) Supp que $\left| \begin{array}{l} E = F \oplus F^{\perp} \\ B_1 \text{ bon de } F \text{ et } B_2 \text{ bon de } F^{\perp} \end{array} \right.$

Mq que $B_1 \cup B_2$ est une bon de E.

i) $B_1 \cup B_2$ est une base de E (base adaptée) (claire)

ii) Tous les vecteurs de $B_1 \cup B_2$ sont unitaires, car B_1 et B_2 des bon.

iii) Si u et v deux vecteurs distincts de $B_1 \cup B_2$, alors $\langle u | v \rangle = 0$; En effet :

⟶ si u et v appartiennent tous les deux à B_1 ou à B_2 :

Alors c'est fini, car B_1 et B_2 bon.

⟶ Si u et v, l'un dans B_1 et l'autre dans B_2 :

On aura l'un dans F et l'autre dans $F^{\perp}$.

D'où ils seront orthogonaux $\square$

Prop 9 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

E esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille orthonormée de E, alors il existe

$\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n \in E$ tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une bon de E.

Démo

On a $E = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \oplus \left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)\right)^{\perp}$

On a $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une bon de $\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Soit $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une bon de $\left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)\right)^{\perp}$.

Alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \sqcup (\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ est une bon de E. $\square$

5) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soit F un sev de dim finie de E.
On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Prop 2

Soient F un sev de dim finie de E, et $(e_1, \dots, e_p)$ une bon de F.
On a :

$$\forall x \in E, \ P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$$

où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

Démo

On avait vu que :

$$x = \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i\right)}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i\right)}_{\in F}$$

D'où $P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$ □

Exercice d'application

Reconsidérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 PQ$$

Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution

On rappelle que : (E_1, E_2) est une bon de $\mathbb{R}_1[X]$, où :

$$\begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = \sqrt{3}(2X-1) \end{cases}$$

$$P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \langle X^2 | E_1 \rangle \cdot E_1 + \langle X^2 | E_2 \rangle \cdot E_2$$

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

$$\|P\| = \left(\int_0^1 P^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

$$\langle X^2 | E_1 \rangle = \int_0^1 t^2\,dt = 1/3$$

$$\langle X^2 | E_2 \rangle = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 t^2(2t-1)\,dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3}(2X-1)$$

$$\boxed{P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = X - \frac{1}{6}}$$

Prop 3 (Inégalité de Bessel)

Soit F un sev de dim finie de E. On a :

$$\forall x \in E, \ \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$

Démo

On a $x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp}$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2$$

$$= \|P_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - P_F(x)\|^2}_{\geq 0} \quad \left(\text{via Pythagore, car } P_F(x) \text{ et } (x - P_F(x)) \text{ sont orthogonaux}\right)$$

$$\geq \|P_F(x)\|^2$$

$\square$

Prop 4

Soit F un sev de dim finie de E.

Soient $x, a \in E$, on a :

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x - a) \in F^\perp \end{cases}$$

Démo

$(\Rightarrow)$

Claire vu que $\begin{cases} P_F(x) \in F \\ x - P_F(x) \in F^\perp \end{cases}$

$(\Leftarrow)$

Supp que $a \in F$ et $(x-a) \in F^\perp$. M.q. $P_F(x) = a$.

On a $x = \underbrace{a}_{\in F} + \underbrace{(x - a)}_{\in F^\perp} \xrightarrow{\text{par déf}} P_F(x) = a$

$\square$

Exercice d'application

Reconsidérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 PQ$$

Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ en vous servant de la prop 4.

Solution

Notons $P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = A$.

Rappel

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^\perp \end{cases}$$

On a $\begin{cases} A \in \mathbb{R}_1[X] \\ (X^2 - A) \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp \end{cases}$

On a $A = \alpha + \beta X$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (qu'on déterminera).

$$(X^2 - A) \in (\mathbb{R}_1[X])^\perp \iff \begin{cases} \langle X^2 - \alpha - \beta X | 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - \alpha - \beta X | X \rangle = 0 \end{cases}$$

(car $(1, X)$ base de $\mathbb{R}_1[X]$)

$$\iff \begin{cases} \int_0^1 (x^2 - \alpha - \beta x)\, dx = 0 \\ \int_0^1 (x^3 - \alpha x - \beta x^2)\, dx = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{3} = 1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times \beta \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \alpha + \frac{1}{3} \times \beta \end{cases}$$

(système d'inconnues α et β à résoudre)

On trouve : $\alpha = -1/6$ et $\beta = 1$

$$A = \alpha + \beta X$$

Enfin :

$$\boxed{P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = X - \frac{1}{6}}$$

$\square$

---

6) Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie.

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

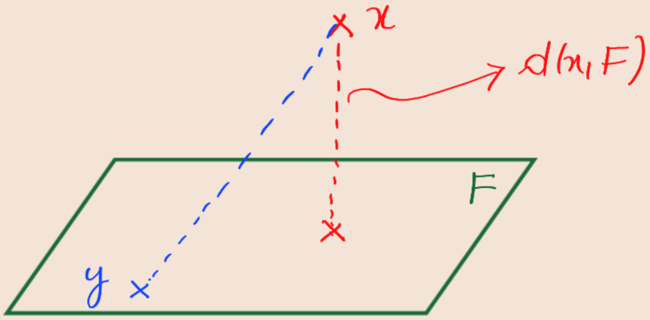
La distance de x à F est :

$$d(x,F) = \inf\left(\{d(x,y) \,/\, y \in F\}\right)$$

Càd

$$d(x,F) = \inf_{y \in F}\left(\|x-y\|\right)$$

Schéma



Prop 2

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

1) $d(x,F) = d(x, P_F(x))$ $\left(= \|x - P_F(x)\|\right)$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x,F) = \|x-y\|$.

3) $d(x,F)=0 \iff x\in F$

Démo

1) $d(x,F)=d(x,P_F(x))$?

Il s'agit de montrer que $\inf\limits_{y\in F}(\|x-y\|)=\|x-P_F(x)\|$.

Or $P_F(x)\in F$, alors $\|x-P_F(x)\|\in\{\|x-y\| / y\in F\}$

Rappel

Soit $A\subset\mathbb{R}$.

Supp que $a\in A$.

$\inf(A)=a \iff a$ est un minorant

Dans ce cas, $a=\min(A)$

Ainsi, il suffit de montrer que:

$$\forall y\in F, \|x-y\|\geqslant\|x-P_F(x)\|$$

Soit alors $y\in F$. On a:

$$\|x-y\|^2=\|\underbrace{(x-P_F(x))}_{\in F^\perp}+\underbrace{(P_F(x)-y)}_{\in F}\|^2$$

$$=\|x-P_F(x)\|^2+\underbrace{\|P_F(x)-y\|^2}_{\geqslant 0} \quad (\text{Pythagore})$$

$$\geqslant\|x-P_F(x)\|^2$$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x,F)=\|x-y\|$?

Soit $y_0\in F$ tel que $d(x,F)=\|x-y_0\|$. Mq que $y_0=P_F(x)$.

On a:

$$\underbrace{\|x-y_0\|^2}_{=d(x,F)^2}=\|\underbrace{(x-P_F(x))}_{\in F^\perp}+\underbrace{(P_F(x)-y_0)}_{\in F}\|^2$$

$$=\underbrace{\|x-P_F(x)\|^2}_{=d(x,F)^2}+\|P_F(x)-y_0\|^2 \quad (\text{Pythagore})$$

d'où $\|P_F(x) - y_0\|^2 = 0$

C à d $y_0 = P_F(x)$

3) $d(x,F) = 0 \iff x \in F$?

$d(x,F) = 0 \iff \|x - P_F(x)\| = 0$

$\iff P_F(x) = x$

$\iff x \in F$

NB

$$d(x,F) = \|x - P_F(x)\| = \inf_{y \in F}(\|x-y\|) = \min_{y \in F}(\|x-y\|)$$

Exercice d'application 1

Reconsidérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 PQ$$

Calculer $d(x^2, \mathbb{R}_1[x])$.

Solution

$$d(x^2, \mathbb{R}_1[x]) = d(x^2, P_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2))$$

$$= \|x^2 - P_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2)\|$$

$$P_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2) = X - \frac{1}{6}$$

$$= \|x^2 - X + \tfrac{1}{6}\|$$

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

$$\|P\| = \sqrt{\langle P|P\rangle} = \sqrt{\int_0^1 P^2(t)\,dt}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right)^2 dx} = \boxed{?}$$

Pr. ELAMIRI   Cours disponible sur   www.iamateacher.org

Exercice d'application 2

Calculer :

1) $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx \right)$ $\left(\text{ou } \min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx \right) \right)$

2) $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \, dx \right)$

3) $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x + ax + b)^2 \, dx \right)$

4) $\inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \, dx \right)$

Solution

1) $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx \right) = ?$

Clé

$$\int_0^1 (P(t))^2 \, dt = \langle P | P \rangle = \|P\|^2 \; ; \; \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) \, dt$$

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx \right) = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\| X^2 - aX - b \|^2 \right)$$

$$= \left(\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \| X^2 - aX - b \| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \| X^2 - (aX + b) \| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|\right)^2$$

$$= \left(d(X^2, \mathbb{R}_1[X])\right)^2$$

$$= \left(\|X^2 - P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|\right)^2$$

$$= \left(\|X^2 - \left(X - \frac{1}{6}\right)\|\right)^2 \quad \left(\text{après calculs}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$$

$$= \boxed{?}$$

---

2) $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2\, dx\right) = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, dx\right)$

$\vdots$

---

3) $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x + ax + b)^2\, dx\right) = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x - ax - b)^2\, dx\right)$

$$= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\|e^x - aX - b\|^2\right)$$

$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$

$$= \left(\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \| e^{x} - aX - b \| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \| e^{x} - (aX + b) \| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \| e^{x} - P \| \right)^2$$

$$= \left(d(e^{x}, \mathbb{R}_1[X]) \right)^2$$

$$= \left(\| e^{x} - P_{\mathbb{R}_1[X]}(e^{x}) \| \right)^2$$

$\vdots$

$\square$

7) Hyperplan dans un espace euclidien

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est ici un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

Soit H un hyperplan de E.

On rappelle que $\dim(H) = n-1$.

On sait aussi que $H^\perp$ est une droite de E $\left(\dim H^\perp = n - \dim H = 1\right)$

Déf

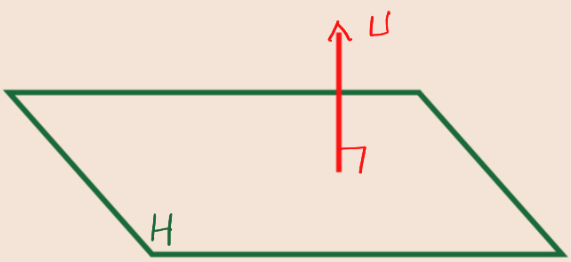
Tout vecteur non nul de la droite $H^\perp$ s'appelle vecteur normal à l'hyperplan H.

Autrement dit :

Soit $u \in E \setminus \{0\}$.

$$\boxed{u \text{ vecteur normal à } H \iff H^\perp = \text{vect}(u) \iff u \in H^\perp \iff H = (\text{vect}(u))^\perp}$$

Schéma



Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation cartésienne :

$$H : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

dans la base B.

On rappelle que ceci veut dire que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$\boxed{x \in H \iff a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0}$$

Prop

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Soit H un hyperplan de E d'équation cartésienne :

$$H : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

dans la base B.

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ est un vecteur normal à l'hyperplan H.

Démo

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ &\iff \langle u | x \rangle = 0, \text{ où } u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \text{ (car } B \text{ bon)} \\ &\iff x \in (\mathrm{Vect}(u))^{\perp} \end{aligned}$$

d'où $H = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$

et donc u est un vecteur normal à H.

8) Symétrie orthogonale – Réflexion

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E.

On sait que : $\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$

Déf :

1) La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la symétrie orthogonale par rapport à F.

2) La symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H est dite réflexion par rapport à H.

9) Automorphismes orthogonaux – Matrices orthogonales

a) Automorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ sera un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est dit endomorphisme orthogonal de E si et ssi :

$$\boxed{\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|}$$

NB :

Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

1) On dit que f conserve la norme.

2) On a aussi :

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

On dit aussi que f conserve la distance.

3) Un endomorphisme orthogonal de E s'appelle aussi isométrie de E.

4) Notation :

$O(E)$ désignera l'ensemble des endom orthogonaux de E.

Prop 2

Tout endomorphisme orthogonale est inversible.

Démo :

Soit $f \in O(E)$. Mq que $f \in GL(E)$.

Il suffit de montrer que f est injectif, car E est de dimension finie comme esp euclidien.

Soit alors $x \in E$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0$$

$$\Rightarrow \|x\| = 0 \quad (\text{car } f \in O(E))$$

$$\Rightarrow x = 0$$

D'où f injectif. $\square$

Prop 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{f \in O(E) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle)}$$

Démo

$(\Leftarrow)$

Soit $x \in E$, on a $\langle f(x) | f(x) \rangle = \langle x | x \rangle$

$$\Rightarrow \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|f(x)\| = \|x\| \quad \square$$

$(\Rightarrow)$

Supp que $(\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|)$.

Soient $x, y \in E$, Mq que $\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

La clé est l'identité de polarisation :

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad (\Omega)$$

On a :

$$\langle f(x)|f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \quad (\text{d'après } (\Omega))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \quad (f \text{ linéaire})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad (f \in O(E))$$

$$= \langle x|y\rangle \quad (\text{d'après } (\Omega))$$

$\square$

Prop 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $f \in O(E) \iff f$ transforme toute bon de E en une bon de E.

2) $f \in O(E) \iff f$ transforme une bon de E en une bon de E.

Démo

1) $f \in O(E) \iff f$ transforme toute bon de E en une bon de E.

$(\Rightarrow)$

Supp que $f \in O(E)$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

M.q. $f(B) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une bon de E.

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\langle f(e_i)|f(e_j)\rangle = \langle e_i|e_j\rangle \quad (\text{car } f \in O(E))$$

$$= \delta_{ij} \quad (\text{car } B \text{ bon})$$

D'où $f(B)$ est une bon de E.

$(\Leftarrow)$

Supp que f transforme toute bon de E en une bon de E.

M que $f \in O(E)$.

Soit $x \in E$. M que $\|f(x)\| = \|x\|$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

D'autre part, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ et $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n} = f(B)$ est une bon de E.

D'où $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Enfin $\|f(x)\| = \|x\|$ $\square$

2) $(\Longrightarrow)$ Vient de 1) $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ Faite dans 1) $(\Leftarrow)$

Prop 5

$(O(E), \circ)$ est un groupe. (dit groupe orthogonal)

Démo

On montre que $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

i) $I_E \in O(E)$?

$\forall x \in E$, $\|I_E(x)\| = \|x\|$ (claire)

ii) Soient $f, g \in O(E)$. M que $f \circ g^{-1} \in O(E)$.

Soit $x \in E$, on a :

$$\|(f \circ g^{-1})(x)\| = \|f(g^{-1}(x))\|$$
$$= \|g^{-1}(x)\| \quad (\text{car } f \in O(E))$$

$= \|g(g^{-1}(x))\|$ (car $g \in \mathcal{O}(E)$)

$= \|x\|$ $\square$

b) Matrices orthogonales

Déf 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est dite orthogonale si et ssi ${}^tA \cdot A = I_n$

Notation

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$, désigne l'ensemble des matrices orthogonales.

Prop 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2) ${}^tA \cdot A = I_n$
3) A inversible et $A^{-1} = {}^tA$
4) $A \cdot {}^tA = I_n$

Démo

Claire

Prop 3

$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff {}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Démo

$A \in O_n(\mathbb{R}) \iff A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ (car $O_n(\mathbb{R})$ groupe)

$\iff {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$

Produit scalaire usuel sur $M_{n1}(\mathbb{R})$:

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle X | Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

À retenir

$$\langle X | Y \rangle = {}^tX . Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Justification

$${}^tX . Y = (x_1 \, \dots \, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Prop 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. On a :

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est une bon de $M_{n1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

Démo

Soit $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

Il est claire que : $C_k = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$.

On a :

$\boxed{(C_1, \dots, C_n) \text{ est une bon de } M_{n1}(\mathbb{R})} \Longleftrightarrow \forall i,j,\ \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Longleftrightarrow \forall i,j,\ \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$ $\boxed{\text{car } C_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} \text{ et } C_j = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{pmatrix}}$

$\Longleftrightarrow \forall i,j,\ \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$

$\Longleftrightarrow \forall i,j,\ ({}^tA \cdot A)_{ij} = \delta_{ij}$

$\Longleftrightarrow \boxed{{}^tA\, A = I_n}$ $\square$

Corollaire 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. On a :

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et ssi $(L_1, \dots, L_n)$ est une bon de $M_{1n}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

Démo

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$

$\Longleftrightarrow$ Les colonnes de ${}^tA$ forment une bon de $M_{n1}(\mathbb{R})$

$\Longleftrightarrow$ Les lignes de A -- - - . $M_{1n}(\mathbb{R})$

Exemples express

1) Notons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

R_θ et A sont-elles orthogonales ?

2) Notons $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$R_\theta \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$?

Démo

1) i) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, car les colonnes forment une bon de $M_{2,1}(\mathbb{R})$.

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ car $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \neq 0$

2) oui, car les colonnes forment une bon de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

En algèbre linéaire, on sait que :

Soit E un $\mathbb{R}$-esp vect de dimension n

Soit B une base de E.

Soit S une famille de cardinal n. On a :

$$\boxed{\underset{B}{\mathrm{mat}}(S) \in GL_n(\mathbb{R}) \iff S \text{ est une base de } E}$$

En algèbre euclidienne, on a :

Prop 6

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Soit B une bon de E.

Soit S une famille de cardinal n. On a :

$$\boxed{\underset{B}{\mathrm{mat}}(S) \in O_n(\mathbb{R}) \iff S \text{ est une bon de } E}$$

Démo

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.

Notons $S = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une famille de E.

Notons $A = \underset{B}{\text{mat}}(S) = (A_{ij})$.

$$C_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix} = \underset{B}{\text{mat}}(\varepsilon_i) \text{ la ième colonne de } A.$$

On a :

$$\langle C_i | C_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} = \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle$$

Ainsi :

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \iff (\forall i, j, \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij})$$

$$\iff (\forall i, j, \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij})$$

$$\iff (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = S \text{ est une bon de } E \quad \square$$

Corollaire 7

Soit E un espace euclidien.
La matrice de passage d'une bon à une bon est une matrice orthogonale.

Démo

C'est l'implication inverse dans (prop 6)

En algèbre linéaire, on sait que :

Soit E un $\mathbb{R}$-esp vect de dimension n.
Soit B une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{\text{mat}_B(f) \in GL_n(\mathbb{R}) \iff f \in GL(E)}$$

En algèbre euclidienne, on a :

Prop 8

Soit E un esp euclidien de dimension n.
Soit B une bon de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{\text{mat}_B(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{O}(E)}$$

Démo

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff f(B) \text{ est une bon de } E$$
$$\iff \underbrace{\text{mat}_B(f(B))}_{\|} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
$$\iff \text{mat}_B(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

$\square$

Prop 9

1) $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) \in \{-1, 1\}$

2) $\forall f \in \mathcal{O}(E),\ \det(f) \in \{-1, 1\}$

Démo

1) On a ${}^tA \cdot A = I_n$

$$\Rightarrow \det({}^tA\, A) = \det(I_n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det({}^tA)}_{=\det(A)} \cdot \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1 \quad \square$$

2) Soit $f \in O(E)$.

$\det(f) = \det\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)$; où B est une bon de E.

$= \pm 1$, car $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$

$\square$

Attention !!

La réciproque est en général fausse :

$$\det(A) = \pm 1 \not\Rightarrow A \text{ orthogonale}$$

Contre-exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 1$ mais $A \notin O_2(\mathbb{R})$

Déf 10

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$.

1) Si $\det(A) = 1$, A est dite matrice orthogonale positive.

2) Si $\det(A) = -1$, A est dite matrice orthogonale négative.

3) $O_n^+(\mathbb{R})$, ou $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ désignera l'ensemble des matrices orthogonales positives.

4) $O_n^-(\mathbb{R})$ désignera l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

Déf 11

Soit $f \in O(E)$, où $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1) Si $\det(f) = 1$, f est dit endomorphisme orthogonal positif.
Il s'appelle aussi isométrie directe.

2) Si $\det(f) = -1$, f est dit endomorphisme orthogonal négatif.
Il s'appelle aussi isométrie indirecte.

3) $O^+(E)$ ou $SO(E)$ désignera l'ensemble des isométries directes.

4) $O^-(E)$ désignera l'ensemble des isométries indirectes.

Prop 12

1) $(SO_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.
Il s'appelle le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

2) Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
$(SO(E), \circ)$ est un groupe.
Il s'appelle le groupe spécial orthogonal sur E.

Démo

1) $(SO_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe ?
$SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$.
$\longrightarrow$ $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det(I_n) = 1$
$\longrightarrow$ Soient $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$. On a $A \cdot B^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
En plus, $\det(A \cdot B^{-1}) = \det(A) \cdot (\det(B))^{-1} = 1$
Car $\det(A) = \det(B) = 1$
D'où $AB^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$

2) $(SO(E), \circ)$ est un groupe ?
$SO(E)$ est un sous-groupe du groupe $(O(E), \circ)$. (Pareil à 1))

10) Orientation d'un espace euclidien – Produit mixte

Orientation d'un espace euclidien

Soit $(E, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Le Choix d'une bon B_0 de E permet d'orienter l'esp euclid E de la manière suivante :

Soit B une bon de E.

On sait que $\det_{B_0}(B) = \pm 1$ (car $\text{mat}_{B_0}(B) \in O_n(\mathbb{R})$ comme mat de passage d'une bon à une bon de E).

Ainsi :

> Si $\det_{B_0}(B) = 1$, B est dite base orthonormée directe (bond)
>
> Si $\det_{B_0}(B) = -1$, B est dite base orthonormée indirecte.

NB

B_0 orientant E est une bond, car $\det_{B_0}(B_0) = 1$

Prop 1

Soit S une bond de E.

Soit B une bon de E. On a :

1) B est une bond $\Longleftrightarrow \det_S(B) = 1$

2) B est une bon indirecte $\Longleftrightarrow \det_S(B) = -1$

Démo

1) B est une bond $\Longleftrightarrow \det_{B_0}(B) = 1$ (B_0 orientant E)

$$\Longleftrightarrow \det_S(B) \times \underbrace{\det_{B_0}(S)}_{=1,\text{ car } S \text{ bond}} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \det_S(B) = 1 \quad \square$$

$$\det_B(f) = \det_S(f) \times \det_B(S)$$

Rappel

Prop et déf 2

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ étant un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

1) Si B_1 et B_2 deux bond, alors :

$$\det_{B_1}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B_2}(x_1, \dots, x_n)$$

2) Le produit mixte des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est le réel $[x_1, \dots, x_n]$ défini par :

$$\boxed{[x_1, \dots, x_n] = \det_B(x_1, \dots, x_n)}$$

où B est une bond de E.

Démo

$$\det_{B_1}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B_2}(x_1, \dots, x_n) \times \underbrace{\det_{B_2}(B_1)}$$

$= 1$, car B_1 et B_2 deux bond.

$$= \det_{B_2}(x_1, \dots, x_n)$$

$\square$

11) Description de $O_2(\mathbb{R})$

Prop 1

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $A \in O(2)$

2) A est de l'une des formes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a^2+b^2=1$.

3) A est l'une des formes $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

Démo

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$

Soit $A \in O(2)$. Notons C_1 et C_2 ses colonnes.

On a $\|C_1\| = 1$, alors

$$\left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a^2+b^2=1 \text{ et } C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

On a $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \in (\mathrm{Vect}(C_1))^{\perp}$

$$\Rightarrow (\mathrm{Vect}(C_1))^{\perp} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Et puisque $\langle C_1 | C_2 \rangle = 0$ (car (C_1, C_2) bon de $M_{2,1}(\mathbb{R})$)

Alors $C_2 \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

càd $\left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ C_2 = \lambda . \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$

Or $\|C_2\| = \left\|\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\| = 1$, alors $\lambda = \pm 1$.

$\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\square$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$

Vient du fait que :

$$a^2+b^2=1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a=\cos\theta \\ b=\sin\theta \end{cases} \quad \square$$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$

Supp que A est l'une des formes $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$; où $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors $A \in \mathcal{O}(2)$, car les deux colonnes formes une bon de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. $\square$

Corollaire 2

1) $\mathcal{O}^+(2) = \{R_\theta \,/\, \theta \in \mathbb{R}\}$; où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2) $\mathcal{O}^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Démo

D'après (prop 1), et vu que

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \text{ et que } \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -1. \quad \square$$

Prop 3

1) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$

2) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta$ et $R_{\theta'}$ commutent.

3) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

4) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ (R_\theta)^m = R_{m\theta}$

Démo

1) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
(Juste faites le calcul)

2) $\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ R_\theta$ et $R_{\theta'}$ commutent. (clair)

3) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

$$R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_0 = I_2 \Rightarrow (R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$$

4) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ (R_\theta)^m = R_{m\theta}$?

i) $\forall n \in \mathbb{N},\ (R_\theta)^n = R_{n\theta}$; par récurrence et via 1°).

ii) $\forall m \in \mathbb{Z}^-,\ (R_\theta)^m = R_{m\theta}$

Posons $m = -n$, où $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(R_\theta)^m = (R_\theta)^{-n} = \left((R_\theta)^{-1}\right)^n = (R_{-\theta})^n \overset{i/}{=} R_{-n\theta} = R_{m\theta}$$

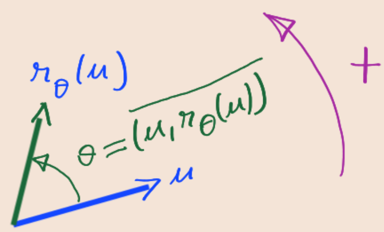
$\square$

12) Description des isométries dans un plan euclidien

$(E_2, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera dans ce paragraphe un plan euclidien orienté.

Rotation d'angle θ :

r_θ étant la rotation d'angle θ.



Pour un vecteur $u \neq 0$, son image $r_\theta(u)$ est tel que :

$$\begin{cases} \|u\| = \|r_\theta(u)\| \\ \widehat{(u, r_\theta(u))} \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

Prop 1

Dans le plan euclidien orienté E_2, les isométries directes sont les rotations.

Autrement dit

Soit $f \in \mathcal{L}(E_2)$. On a :

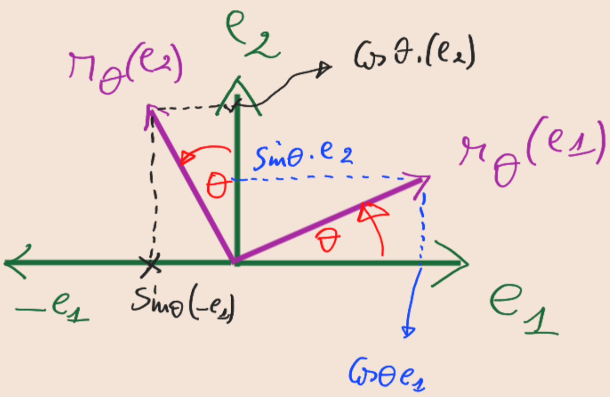
$f \in \mathcal{O}^+(E_2) \Leftrightarrow f$ est une rotation

Démo

$(\Leftarrow)$

Soit $f = r_\theta$, la rotation d'angle θ.

Soit $B_0 = (e_1, e_2)$ une bond.



$$\begin{cases} r_\theta(e_1) = \cos\theta.e_1 + \sin\theta.e_2 \\ r_\theta(e_2) = \cos\theta.e_2 + \sin\theta.(-e_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{B_0}{mat}(r_\theta) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \begin{array}{cc} r_\theta(e_1) & r_\theta(e_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \end{array}$$

$\Rightarrow \underset{B_0}{mat}(f) = R_\theta$; Et donc $f \in \mathcal{O}^+(E_2)$ $\square$

$(\Rightarrow)$

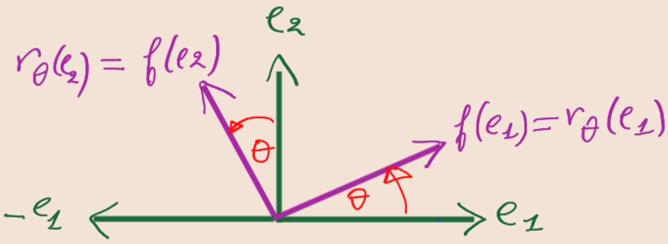
Soit $f \in \mathcal{O}^+(E_2)$. Mq que f est une rotation.

Soit $B = (e_1, e_2)$ une bond de E_2.

On a que $\underset{B}{mat}(f) \in \mathcal{O}^+(2)$.

D'où : $\exists \theta \in \mathbb{R},\ \underset{B}{\text{mat}}(f) = R_\theta = \begin{array}{c|cc} & f(e_1) & f(e_2) \\ \hline e_1 & \cos\theta & -\sin\theta \\ e_2 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(e_1) = \cos\theta . e_1 + \sin\theta . e_2 \\ f(e_2) = -\sin\theta . e_1 + \cos\theta . e_2 \end{cases}$$



$f = r_\theta$ en e_1 et en e_2.

D'où $\boxed{f = r_\theta}$ □

Prop 2

Dans le plan euclidien E_2, les isométries indirectes sont les réflexions.

Autrement dit

Soit $f \in \mathcal{L}(E_2)$. On a :

f est une isométrie indirecte $\Longleftrightarrow$ f est une réflexion.

Démo

$(\Longleftarrow)$

Soit f une réflexion de E_2.

Notons $f = S_D$, où D une droite de E_2 (hyperplan de E_2).

On a $E_2 = D \oplus D^\perp$ et $f = S_D$.

Soit $B = (e_1, e_2)$ une base de E_2 adaptée à cette décomposition.

On a : $\begin{cases} S_D(e_1) = e_1 \ ; \text{ car } e_1 \in D \\ S_D(e_2) = -e_2 \ ; \text{ car } e_2 \in D^\perp \end{cases}$

$$\Rightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(S_D) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^-(2)$$

D'où $\boxed{f \in \mathcal{O}^-(E_2)}$ □

($\Rightarrow$)

Supp que $f \in \mathcal{O}^-(E_2)$. Mq que f est une réflexion.

Soit B une bon de E_2. Alors $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathcal{O}^-(2)$.

$$\Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On vérifie aisement que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^2 = I_2$.

D'où f est une symétrie.

Étant un endomorphisme orthogonal et une symétrie, f est donc une symétrie orthogonale, car :

$$\begin{cases} \ker(f-I) \subset (\ker(f+I))^{\perp} & \text{(facile à vérifier)} \\ \dim(\ker(f-I)) = \dim(\ker(f+I))^{\perp} & \text{(encore facile)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\ker(f-I) = (\ker(f+I))^{\perp}$, et donc f symétrie orthogonale □

Reste à montrer que la base $F = \ker(f-I)$ de la symétrie orthogonale f est un hyperplan, pour tirer que f est une réflexion :

Càd de vérifier que $\dim(F) = 1$.

Donc on cherchera à exclure les cas ($\dim F = 0$ et $\dim F = 2$)

$\rightsquigarrow$ Supp que $\underline{\dim F = 2}$

Alors $\dim F^{\perp} = 0$ et donc $S_F = f = I_E \in \mathcal{O}^+(E)$

Ce qui contredit le fait que $f \in \mathcal{O}^-(E)$.

$\rightsquigarrow$ Supp que $\underline{\dim F = 0}$

Alors $\dim F^{\perp} = 2$ et donc $S_F = f = -I_E \in \mathcal{O}^+(E)$

Ce qui contredit le fait que $f \in O^-(E)$. $\square$

Résumé :

Soit E_2 un esp euclidien orienté.

1) Les isométries directes sont les rotations.
2) Les isométries indirectes sont les réflexions.
3) Les isométries sont les rotations et les réflexions.
4) La composée de deux rotations est une rotation.
5) La composée de deux réflexions est une rotation.
6) La composée d'une réflexion et d'une rotation est une réflexion.
7) Les rotations commutent ; $(O^+(E_2), \times)$ est un groupe abelien.
8) Toute isométrie peut être écrite comme composée de réflexions.

Autrement dit :

Le groupe $(O^+(E_2), \times)$ est engendré par les réflexions.

(Voir Chap 1 " Structures algébriques ")

Démo

8) Toute isométrie peut être écrite comme composée de réflexions ?

Soit $f \in O(E_2)$.

Si f est une réflexion :

C'est fini.

Si f est une rotation :

Soit s une réflexion de E_2.

On a $f = S\circ(S\circ f)$ (car $S^2 = id_{E_2}$)

Et $(S\circ f)$ est une réflexion comme composée d'une rotation et d'une réflexion.

D'où f est composée de deux réflexions. $\square$

---

13) Réduction d'une isométrie en dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Prop 1

Soient $f \in O(E)$ et F un sev de E.

1) Si F est stab. par f alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

2) $Sp(f) \subset \{-1, 1\}$

Démo

1) Voir TD.

2) Soit $\lambda \in Sp(f)$. Soit $e \neq 0$ tel que $f(e) = \lambda e$.

On a $\|f(e)\| = \|e\|$ car $f \in O(E)$

$\Rightarrow \|\lambda e\| = \|e\|$

$\Rightarrow |\lambda| = 1$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$ $\square$

Lemme

Soient E un $\mathbb{R}$-esp vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Il existe une droite ou plan stable par f.

Démo

Voir TD.

Prop 2

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in O(E)$.
Il existe une bon de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de l'une des formes : R_θ, 1 ou (-1)

Démo

Raisonnons par récurrence sur $n = \dim(E) \geq 1$.

1) Pour $n=1$

Soit E un esp euclid de dim $n=1$.
Soit $f \in O(E)$.
Soit $B = (e)$, où e unitaire. B est une bon de E.
En plus, $\underset{B}{\text{mat}}(f) = (\lambda)$, et $\lambda \in \{-1, 1\}$ car $Sp(f) \subset \{-1, 1\}$.
$\underset{B}{\text{mat}}(f)$ est sous la forme voulue.

2) Pour $n=2$

Soit E un esp euclid de dim $n=2$.
Soit $f \in O(E)$.
Étant une isométrie sur un plan euclidien, f est alors une rotation ou une réflexion.

2)a) Si f est une rotation

Soit B une bond, on a $\underset{B}{\text{mat}}(f) = R_\theta$; où θ l'angle de la rotation.
Et c'est la forme désirée.

2)b) Si f est une réflexion

Notons D la base de la réflexion.
Soit B une bon adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$.
On a $\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est sous la forme voulue.

3) Soit $n \geq 3$.

Supp que la propriété est vraie si on est en dimension $(n-1)$ et $(n-2)$.

Montrons qu'elle est vraie pour la dimension n.

Soit alors E un espace euclidien de dimension n.

Soit $f \in O(E)$.

Il existe F, droite ou plan, stable par f. (Lemme).

$F^\perp$ est aussi stable par f, car $f \in O(E)$.

Notons f_1 et f_2 les endomorphismes induits par f sur F et $F^\perp$ respectivement.

On a $f_1 \in O(F)$ et $\dim(F) = 2$ ou 1.

Alors d'après les cas 1 et 2, il existe une bon B_1 de F telle que $\underset{B_1}{\mathrm{mat}}(f_1)$ soit de la forme désirée.

Et on a $f_2 \in O(F^\perp)$, et $\dim(F^\perp) = n-1$ ou $(n-2)$.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une bon B_2 de $F^\perp$ telle que $\underset{B_2}{\mathrm{mat}}(f_2)$ soit de la forme voulue.

Or $E = F \oplus F^\perp$, alors $B = B_1 \cup B_2$ est une bon de E.

Par stabilité de F et $F^\perp$ par f, on a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \underset{B_1}{\mathrm{mat}}(f_1) & 0 \\ \hline 0 & \underset{B_2}{\mathrm{mat}}(f_2) \end{array}\right)$$

qui est de la forme désirée, puisque $\underset{B_1}{\mathrm{mat}}(f_1)$ et $\underset{B_2}{\mathrm{mat}}(f_2)$ le sont. $\square$

Attention ⚠

Une matrice orthogonale n'est nécessairement pas diagonalisable.

Par exemple :

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

$R_{\frac{\pi}{2}}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $\chi_{R_{\frac{\pi}{2}}}(X) = X^2+1$, n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 3 (version matricielle)

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice orthogonale P et une matrice D, diagonale par blocs de l'une des formes R_θ, 1 ou (-1), telles que :

$$\boxed{A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP}$$

14) Rotation dans un espace euclidien de dimension 3

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est ici un esp euclid orienté de dimension 3.

Définissons r, la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par le vecteur unitaire e_1 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une bond de E.

On a $E = vect(e_1) \oplus vect(e_2, e_3)$.

Pour définir la rotation r, il suffit de la définir sur $vect(e_1)$ et $vect(e_2, e_3)$.

i) Sur $vect(e_1)$:

$r(e_1) = e_1$ (càd r est l'identité sur $vect(e_1)$)

ii) Sur le plan $vect(e_2, e_3) = P$:

On oriente d'abord le plan P par la bon (e_2, e_3).

Sur P, r coïncide avec la rotation plane d'angle θ. $\square$

NB Toute rotation est une isométrie directe.

Démo

Avec les mêmes notations que plus haut, on a :

$$\underset{B}{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O^+(3)$$

D'où $f \in O^+(E)$. $\square$

14) Isométries directes dans un espace euclidien de dimension 3

Prop

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp euclidien orienté de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{f \text{ est une isométrie directe} \iff f \text{ est une rotation}}$$

Démo

$(\Leftarrow)$

Vue ci-dessus.

$(\Rightarrow)$

Supp que f est une isométrie directe.

Mq que f est une rotation.

On a $f \in \mathcal{O}(E)$, alors il existe une bon $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

de E telle que $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f)$ soit diagonale par blocs de l'une

des formes $1, -1$ ou R_θ.

Or $\det(f) = 1$ $(f \in \mathcal{O}^+(E))$.

Alors, quitte à réordonner les vecteurs de $\mathcal{B}$, on aura

$$\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{R_θ}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

Quitte à remplacer e_1 par $(-e_1)$, il existe alors une

bond $\mathcal{S} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que :

$$\underset{S}{\mathrm{mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & R_\theta \end{array}\right)$$

Ainsi, f est la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par ε_1. $\square$

15) Détermination pratique d'une rotation en dimension 3

(Complément)

E est un esp euclidien orienté de dimension 3.

f est une rotation sur E.

On verra ici une méthode pratique pour déterminer les éléments caractéristiques de cette rotation :

$$\boxed{\text{L'angle } \theta \text{ et le vecteur unitaire } e_1}$$

a) Détermination de e_1

Via $f(x) = x \Leftrightarrow \dots$

On trouve un vecteur $x_0 \neq 0$ vérifiant $f(x_0) = x_0$.

On prend $e_1 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$

b) Détermination de l'angle θ

i) Détermination de $\cos(\theta)$

C'est via la trace de f, qui est aussi égale à la trace de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$2\cos\theta + 1 = \underbrace{tr(f)}_{\text{connue}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \ldots}$$

ii) Détermination du signe de $\sin\theta$

Règle (à retenir et appliquer)

On prend un vecteur $x \notin vect(e_1)$.

Le signe de $\sin(\theta)$ est celui du produit mixte $[e_1, x, f(x)]$.

Démo de la règle :

Complétons e_1 en une bond $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Posons $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

On a $x \in vect(e_1) \Leftrightarrow (\beta, \gamma) = (0,0) \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 0$

D'où $x \notin vect(e_1) \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 > 0$

D'autre part, on a $\underset{B}{mat}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et

$$\underset{B}{mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors $$\underset{B}{mat}(f(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \cos\theta.\beta - \gamma\sin\theta \\ \sin\theta.\beta + \cos\theta.\gamma \end{pmatrix}$$

D'où :

$$[e_1, x, f(x)] = \underset{B}{\det}(e_1, x, f(x)) \quad (\text{car } B \text{ bond})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \cos\theta.\beta - \gamma\sin\theta \\ 0 & \gamma & \sin\theta.\beta + \cos\theta.\gamma \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[e_1, x, f(x)] = \sin\theta . \underbrace{(\beta^2 + \gamma^2)}_{>0}}$$

Enfin $\boxed{[e_1, x, f(x)] \text{ et } \sin\theta \text{ sont du même signe.}}$

$\square$

Exercice 14 (du TD)

Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ canoniquement orienté (càd que sa base canonique est une bond)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (z, x, y)$.

Montrer que f est une rotaion et préciser ses éléments caractéristiques.

Solution

f est une isométrie car :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\| f(x, y, z) \| = \| (x, y, z) \|$

$\det(f) = \dots = 1$

$\Rightarrow$ f isométrie directe, càd f est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

a) $e_1 = ?$

$f(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow \dots$

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)}$$

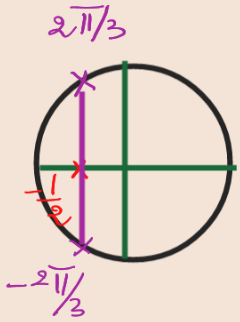
b) $\theta = ?$

i) $\cos\theta = ?$

$\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; où B_c la base can de $\mathbb{R}^3$

$\mathrm{tr}(f) = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \boxed{\cos(\theta) = -\frac{1}{2}}$

Alors $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$



Pour décider, on a besoin du signe de $\sin\theta$.

ii) signe de $\sin\theta$?

On a $\varepsilon_1 = (1,0,0) \notin \mathrm{vect}(e_1)$ $\left(e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right)$

$[e_1, \varepsilon_1, f(\varepsilon_1)] = \underset{B_c}{\det}(e_1, \varepsilon_1, f(\varepsilon_1))$ $\left(\text{car } B_c \text{ bond de } \mathbb{R}^3\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

$\Rightarrow \sin(\theta) > 0$

d'où $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ $\square$

III) Adjoint d'un endomorphisme

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera dans ce paragraphe un espace euclidien de dim $n \geq 1$

1) Théorème de représentation de Riesz

Notation

Soit $a \in E$. L'application $x \longmapsto \langle a|x \rangle$ est une forme linéaire sur E.

On la notera $\langle a|\cdot \rangle$.

Lemme

L'application $\begin{array}{rcl} \phi : E & \longrightarrow & E^* \\ a & \longmapsto & \langle a|\cdot \rangle \end{array}$ est un isomorphisme.

Démo

i) ϕ linéaire (OK)

ii) ϕ injective :

$$\phi(a) = 0 \Rightarrow \langle a|\cdot \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in E, \langle a|x \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle a|a \rangle = 0$$
$$\Rightarrow a = 0$$

iii) $\dim(E^*) = \dim E \Rightarrow \phi$ bij.

Prop (théorème de Riesz)

$\forall \varphi \in E^*, \exists! \, a \in E, \ \varphi = \langle a, \cdot \rangle$

Démo

ϕ bijective $\Rightarrow$ le résultat

2) Adjoint d'un endomorphisme

Prop et déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \ \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f^*(y) \rangle$$

2) f^* s'appelle l'adjoint de f.

Démo

En exo.

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $(f^*)^* = f$

2) $\ker(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$

3) $\mathrm{Im}(f^*) = (\ker(f))^\perp$

4) $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$

Démo

1) $(f^*)^* = f$?

Soit $x \in E$. Mq $(f^*)^*(x) = f(x)$.

Il suffit de montrer que :

$$\forall y \in E, \ \langle (f^*)^*(x) | y \rangle = \langle f(x) | y \rangle$$

Soit alors $y \in E$. On a :

$$\langle (f^*)^*(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle$$
$$= \langle f(x) \mid y \rangle$$

$\square$

---

2) $\ker(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$?

Soit $x \in E$. On a :

$$x \in \ker(f^*) \iff f^*(x) = 0$$
$$\iff \forall y \in E,\ \langle f^*(x) \mid y \rangle = 0$$
$$\iff \forall y \in E,\ \langle x \mid f(y) \rangle = 0$$
$$\iff \forall z \in \mathrm{Im}(f),\ \langle x \mid z \rangle = 0$$
$$\iff x \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$$

$\square$

---

3) $\mathrm{Im}(f^*) = (\ker(f))^{\perp}$?

Il suffit de montrer que $(\mathrm{Im}(f^*))^{\perp} = \ker(f)$, puis on passera à l'orthogonal, et c'est fini.

On a :

$$\ker(f) = \ker((f^*)^*) \quad (\text{d'après } 1^\circ)$$
$$= (\mathrm{Im}(f^*))^{\perp} \quad (\text{d'après } 2^\circ)$$

$\square$

---

4) $rg(f^*) = rg(f)$

$$rg(f^*) = \dim(\mathrm{Im}(f^*))$$
$$= \dim((\ker(f))^{\perp})$$
$$= \dim(E) - \dim(\ker(f))$$
$$= rg(f) \quad (\text{Thm du rang}).$$

$\square$

Prop 3

1) L'application $f \mapsto f^*$ est linéaire, càd :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$$

2) $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une bon de E. On a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f^*) = {}^t\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)$$

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev de E.

Si F est stable par f alors $F^{\perp}$ est stable par f^*.

Démo

1) $(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$?

Soit $x \in E$. Mq que $(\alpha f + \beta g)^*(x) = \alpha f^*(x) + \beta g^*(x)$

C.à.d M.q. :

$\forall y \in E, \langle (\alpha f+\beta g)^*(x) \mid y \rangle = \langle \alpha f^*(x)+\beta g^*(x) \mid y \rangle$

Soit alors $y \in E$. On a :

$$\langle (\alpha f+\beta g)^*(x) \mid y \rangle = \langle x \mid (\alpha f+\beta g)(y) \rangle$$
$$= \alpha \langle x \mid f(y) \rangle + \beta \langle x \mid g(y) \rangle$$
$$= \alpha \langle f^*(x) \mid y \rangle + \beta \langle g^*(x) \mid y \rangle$$
$$= \langle \alpha f^*(x)+\beta g^*(x) \mid y \rangle$$

$\square$

2) $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Soit $x \in E$. M.q. $(f \circ g)^*(x) = (g^* \circ f^*)(x)$.

Soit $y \in E$. Il suffit de montrer que :

$$\langle (f \circ g)^*(x) \mid y \rangle = \langle (g^* \circ f^*)(x) \mid y \rangle$$

On a :

$$\langle (f \circ g)^*(x) \mid y \rangle = \langle x \mid (f \circ g)(y) \rangle$$
$$= \langle x \mid f(g(y)) \rangle$$
$$= \langle f^*(x) \mid g(y) \rangle$$
$$= \langle g^*(f^*(x)) \mid y \rangle$$
$$= \langle (g^* \circ f^*)(x) \mid y \rangle$$

$\square$

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une bon de E. M.q :

$$\underset{\mathcal{B}}{mat}(f^*) = {}^t\left(\underset{\mathcal{B}}{mat}(f)\right)$$

Notons :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \\ \underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \\ \underset{\mathcal{B}}{mat}(f^*) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \end{array}}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Il s'agit de montrer que $b_{ij} = a_{ji}$.

On a :

$$b_{ij} = \langle f^*(e_j) | e_i \rangle \quad \left(\underset{\mathcal{B}}{mat}(f^*) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\right)$$

$$= \langle e_j | f(e_i) \rangle$$

$$= \langle f(e_i) | e_j \rangle$$

$$= a_{ji} \quad \left(\underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\right)$$

$\square$

4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev de E.

Supposons que F est stable par f.

Montrons que $F^\perp$ est stable par f^*.

Soit $x \in F^\perp$. M. que $f^*(x) \in F^\perp$.

Soit alors $y \in F$. M.q $\langle f^*(x) | y \rangle = 0$

On a :

$\langle f^*(x) / y\rangle = \langle x / f(y)\rangle$

Or $y \in F$ et F stable par f, alors $f(y) \in F$.

Et puisque $x \in F^\perp$ alors $\langle x / f(y)\rangle = 0$

Alors $\langle f^*(x) / y\rangle = 0$

$\square$

Prop 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$f \text{ est une isométrie } \iff f^* \circ f = id_E$$

Démo

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que :

$$f \text{ est une isométrie } \iff f^* \circ f = id_E$$

On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ est une isométrie } &\iff \forall x, y \in E,\ \langle f(x) / f(y)\rangle = \langle x / y\rangle \\
&\iff \forall x, y \in E,\ \langle x / f^*(f(y))\rangle = \langle x / y\rangle \\
&\iff \forall y \in E,\ \left(\forall x \in E,\ \langle x / (f^* \circ f)(y)\rangle = \langle x / y\rangle\right) \\
&\iff \forall y \in E,\ (f^* \circ f)(y) = y \\
&\iff f^* \circ f = id_E
\end{aligned}$$

$\square$

NB

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$f \text{ est une isométrie } \iff (f \text{ inversible et } f^* = f^{-1})$$

Endomorphismes symétriques (ou auto-adjoints)

1) Généralités

Déf 1

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est un endomorphisme symétrique si et ssi :

$$\forall x, y \in E, \ \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est un endomorphisme symétrique.

2) $f^* = f$

« f est aussi dit auto-adjoint. »

Démo

En exo (facile).

Prop2

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit B une bon de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f endomorphisme auto-adjoint de E.

2) $\underset{B}{\text{mat}}(f)$ est une matrice symétrique.

Démo

$$f^* = f \iff \underset{B}{\text{mat}}(f^*) = \underset{B}{\text{mat}}(f)$$

$$\iff {}^t\left(\underset{B}{\text{mat}}(f)\right) = \underset{B}{\text{mat}}(f) \quad (\text{car } B \text{ est une bon de } E)$$

$$\iff \underset{B}{\text{mat}}(f) \text{ est une matrice symétrique.} \qquad \square$$

Notation

$S(E)$ désignera l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E.

Prop3

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

$S(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Démo

Soit B une bon de E.

Considérons l'isomorphisme $\phi : \begin{array}{|lcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \underset{B}{\text{mat}}(f) = \phi(f) \end{array}$

On a $S(E) = \phi^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$; où $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles.

En effet :

$$f \in S(E) \iff \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in S_n(\mathbb{R})$$
$$\iff \phi(f) \in S_n(\mathbb{R})$$
$$\iff f \in \phi^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$$

Ainsi, $S(E) = \phi^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$.

D'où $S(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$, et $\dim(S(E)) = \underbrace{\dim(S_n(\mathbb{R}))}_{=\frac{n(n+1)}{2}}$ $\square$

Prop 4

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sev supplémentaires orthogonaux.

Càd : $(\ker(f))^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$

Démo

On a $\dim(\ker(f))^{\perp} = n - \dim(\ker(f))$

$= \dim(\mathrm{Im}(f))$ (thm du rang)

Alors il suffit de montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset (\ker(f))^{\perp}$.

Soient $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $t \in \ker(f)$. Mq que $\langle x | t \rangle = 0$.

$x \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow (\exists s \in E,\ x = f(s))$.

Ainsi :

$$\langle x | t \rangle = \langle f(s) | t \rangle$$
$$= \langle s | \underbrace{f(t)}_{=0,\ \text{car } t \in \ker(f)} \rangle \quad (\text{car } f \text{ symétrique})$$
$$= 0$$

Enfin : $(\ker(f))^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$ $\square$

Prop 5

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint.

Si F est un sev stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démo

Supp que F est un sev stable par f.

Alors $F^\perp$ est aussi stable par f^*.

Or $f^* = f$, alors $F^\perp$ est aussi stable par f. $\square$

Prop 6

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien

1) Supp que f est un projecteur de E. On a :

f est projecteur orthogonal $\Longleftrightarrow$ f est endomorphisme auto-adjoint

2) Supp que f est une symétrie de E. On a :

f est symétrie orthogonale $\Longleftrightarrow$ f est endomorphisme auto-adjoint

Démo

1) Supp que f est un projecteur de E.

Notons $F = \mathrm{Im}(f)$ et $G = \ker(f)$.

f est le projecteur sur F parallèlement à G.

$(\Longrightarrow)$

Supp que f est un projecteur orthogonal, et m que

f est un endom symétrique.

Soient $x, y \in E$. Mq que $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$.

Posons $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$; où $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$.

On a $\langle f(x) | y \rangle = \langle x_1 | y_1 + y_2 \rangle$

$= \langle x_1 | y_1 \rangle$ car $\langle x_1 | y_2 \rangle = 0$

et $\langle x | f(y) \rangle = \langle x_1 + x_2 | y_1 \rangle$

$= \langle x_1 | y_1 \rangle$

D'où $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$ $\square$

$(\Leftarrow)$

Supp que f est un endom symétrique, et m que f est un projecteur orthogonal.

On a que f est un projecteur, alors ça reste à vérifier que $F = G^{\perp}$, càd que $\mathrm{Im}(f) = (\ker(f))^{\perp}$.

Ce qui est vrai d'après la (prop 4) $\square$

2) Supp que f est une symétrie de E. On a :

f est symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ f est endomorphisme symétrique

Notons $F = \ker(f - I_E)$ et $G = \ker(f + I_E)$.

On sait que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Notons P_F le projecteur sur F parallèlement à G.

Pour $x = \underset{\in F}{x_1} + \underset{\in G}{x_2}$, on a $\begin{cases} P_F(x) = x_1 \\ f(x) = x_1 - x_2 \\ I_E(x) = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow (f + I_E)(x) = 2P_F(x)$

D'où $\frac{1}{2}(f + I_E) = P_F$

Par suite :

f est endomorphisme symetrique $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f + I_E) \in S(E)$

Car $S(E)$ est un esp vectoriel et $I_E \in S(E)$

$\Leftrightarrow P_F \in S(E)$

$\Leftrightarrow P_F$ projecteur orthogonale

$\Leftrightarrow F = G^{\perp}$

$\Leftrightarrow f$ symétrie orthogonale

$\square$

---

2) Le théorème spectral

Lemme

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in S(E)$.

1) $\chi_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

2) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Démo

1) $\chi_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$?

Notons $S = \underset{B}{mat}(f)$, où B une bon de E.

Il s'agit de m que $\chi_S(x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

$\chi_S(x)$, en tant que matrice complexe, est scindé dans $\mathbb{C}$.

Il suffit alors de vérifier que toutes les racines complexes de $\chi_S(X)$ sont réelles.

Soit λ une racine complexe de $\chi_S(X)$. Mq que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Càd que $\overline{\lambda} = \lambda$.

On a $\lambda \in S_p(S)$, alors :

$$\exists X \in M_{n1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}, \; SX = \lambda X$$

D'autre part, on sait que S est symétrique réelle car f end symétr.

D'où $\overline{S} = S$.

On a $SX = \lambda X \Rightarrow \overline{S}\,\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$

$$\Rightarrow S\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X} \quad (S \text{ réelle})$$

$$\Rightarrow {}^t\overline{X}.{}^tS = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}$$

$$\Rightarrow {}^t\overline{X}\,S = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} \quad (S \text{ symétrique})$$

$$\Rightarrow {}^t\overline{X}\,S\,X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}\,X$$

Et $SX = \lambda X \Rightarrow {}^t\overline{X}\,SX = \lambda\,{}^t\overline{X}\,X$

D'où $\overline{\lambda}\,({}^t\overline{X}\,X) = \lambda\,({}^t\overline{X}\,X)$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a ${}^t\overline{X}.X = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\,x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, car $X \neq 0$

D'où $\boxed{\overline{\lambda} = \lambda}$ CQFD

2) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

En effet :

Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de f.

Mq que $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.

Soient $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$. Mq que $\langle x|y\rangle = 0$.

On a $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$

$\Rightarrow \langle \lambda x|y\rangle = \langle x|\mu y\rangle$

$\Rightarrow \lambda\langle x|y\rangle = \mu\langle x|y\rangle$

$\Rightarrow (\lambda-\mu)\langle x|y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x|y\rangle = 0$, car $\lambda \neq \mu$

$\square$

Prop 1 (théorème spectral)

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Si f est un endomorphisme auto-adjoint, alors E possède une bon formée de vecteurs propres de f.

Démo

Faisons une démonstration par récurrence sur la dimension de E :

$\forall n \geq 1$, si E esp euclid de dim n et $f \in S(E)$, alors E possède une bon formée de vecteurs propres de f

Pour $n=1$

Supp $\dim(E)=1$ et $f \in S(E)$.

Toute bon (e) de E convient. $\square$

Hérédité

Soit $n \geq 2$.

Supp que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.

Soient alors E un esp euclid de dim n, et f un endom symétrique de E.

Montrons l'existence d'une bon de E formée de vecteurs propres de f.

$\chi_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, soit alors $\lambda \in S_p(f)$.

Soit e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ.

La droite $D = vect(e_1)$ est stable par f, alors $D^\perp$ est aussi stable par f, car f symétrique.

Notons f_1 et f_2 les endomorphismes induits par f sur D et $D^\perp$ respectivements.

On a que f_2 est symétrique et $\dim(D^\perp) = n-1$.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une bon $(e_2, \dots, e_n)$ de $D^\perp$ formée de vecteurs propres de f_2.

Il est clair que $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une bon de E.

En plus elle est formée de vecteurs propres de f. $\square$

Corollaire 2 (théorème spectral matriciel)

Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre n, alors :

1) Il existe une matrice diagonale réelle D, et une matrice orthogonale P telles que :

$$\boxed{A = P D \, {}^tP}$$

2) Il existe une bon $(E_1, \dots, E_n)$ de $M_{n1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A ; $M_{n1}(\mathbb{R})$ étant muni de son produit scalaire usuel.

3) Les sous-espace propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 4

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Attention !

Le résultat est faux pour les matrices symétriques complexes.

Contre-exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ symétrique complexe, mais A n'est pas diagonalisable.

En effet

$\chi_A(X) = X^2$, donc $Sp(A) = \{0\}$.

Méthode 1

Supp que A est diagonalisable.

Alors $A = PDP^{-1}$, où $D = diag(0,0)$

$\Rightarrow A = 0$, Ce qui est absurde $\square$

Méthode 2

$\dim(E_0(A)) \neq m_0(A)$, car :

$m_0(A) = 2$

$\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = 2 - rg(A) = 1$

Car $rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = rg(C_1) = 1$ $(C_1 = -i C_2)$ $\square$

Exercice à savoir traiter ⚠

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Soit f endomorphisme symétrique de E.

Soient $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de f.

Ainsi : $(\lambda_1 = \min(S_p(f))$ et $\lambda_p = \max(S_p(f)))$

Considérons l'application

$$\phi : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \phi(x) = \langle f(x) | x \rangle \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ admet $\min(S_p(f))$ et $\max(S_p(f))$ comme extremums sur la sphère unité S.

Rappel : $S = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$

Démarrage de la solution

Il s'agit de montrer que :

1) $\forall x \in S, \ \lambda_1 \leqslant \phi(x) \leqslant \lambda_p$

2) $\exists e \in S,\ \phi(e) = \lambda_1$

3) $\exists e' \in S,\ \phi(e') = \lambda_p$

Version matricielle de l'exercice ci-dessus ⚠

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ i.e une matrice symétrique réelle.

Soient $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de A.

Ainsi : $\left(\lambda_1 = \min(S_p(A)) \text{ et } \lambda_p = \max(S_p(A))\right)$

Considérons l'application

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} M_{n1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \phi(X) = {}^tX\,A\,X \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ admet $\min(S_p(A))$ et $\max(S_p(A))$ comme extremums sur la sphère unité S de $M_{n1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire usuel : $\langle X | Y \rangle = {}^tX.Y$

3) Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs

Déf 1

1) Un endomorphisme auto-adjoint f est dit positif si et ssi :

$$\forall x \in E,\ \langle f(x) | x \rangle \geq 0$$

2) Et il est dit défini positif si et ssi :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle f(x) | x \rangle > 0$$

Notations

1) $S^+(E)$: L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs.
2) $S^{++}(E)$: L'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs.

Prop 2

Un endomorphisme auto-adjoint est positif (resp. défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives).

Démo

Soit $f \in S(E)$.

1) M. que :

$$f \in S^+(E) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in Sp(f),\ \lambda \geqslant 0)$$

($\Rightarrow$)

Supp que $f \in S^+(E)$.

M. que $(\forall \lambda \in Sp(f),\ \lambda \geqslant 0)$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E, formée de vecteurs propres.

Alors $\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Les λ_i sont les valeurs propres de f.

Alors il s'agit de montrer que : $(\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0)$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

On a $f(e_i) = \lambda_i e_i$

On pose $\langle f(e_i) | e_i \rangle \geqslant 0$ car $f \in S^+(E)$

D'où $\langle \lambda_i e_i | e_i \rangle \geqslant 0$

$$\Rightarrow \lambda_i \underbrace{\langle e_i | e_i \rangle}_{=1} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i \geqslant 0 \quad \square$$

$(\Leftarrow)$

Supp que $(\forall \lambda \in S_p(f),\ \lambda \geqslant 0)$.

M. que $f \in S^+(E)$.

Soit $x \in E$. M que $\langle f(x) | x \rangle \geqslant 0$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une bon de E, formée de vecteurs propres.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $(\forall i,\ f(e_i) = \lambda_i e_i)$

Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle f(x) | x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{car } B \text{ est une bon de } E. \\
&\geqslant 0, \text{ car } (\forall i,\ \lambda_i \geqslant 0)
\end{aligned}$$

$\square$

2) M. que : $f \in S^{++}(E) \Leftrightarrow (\forall \lambda \in S_p(f),\ \lambda \geqslant 0)$

$(\Longrightarrow)$

Supp que $f \in S^{++}(E)$.

M. que $(\forall \lambda \in S_p(f),\ \lambda > 0)$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E, formée de vecteurs propres.

Alors $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Les λ_i sont les valeurs propres de f.

Alors il s'agit de montrer que : $(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i > 0)$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

On a $f(e_i) = \lambda_i e_i$

En plus $\langle f(e_i) | e_i \rangle > 0$ car $f \in S^{++}(E)$ et $e_i \neq 0$

D'où $\langle \lambda_i e_i | e_i \rangle > 0$

$\Longrightarrow \lambda_i \underbrace{\langle e_i | e_i \rangle}_{=1} > 0$

$\Longrightarrow \lambda_i > 0$ $\square$

$(\Longleftarrow)$

Supp que $(\forall \lambda \in S_p(f),\ \lambda > 0)$.

M. que $f \in S^{++}(E)$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. M que $\langle f(x) | x \rangle > 0$.

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E, formée de vecteurs propres.

Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que : $(\forall i, f(e_i)=\lambda_i e_i)$

Notons $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a :

$$\begin{aligned}\langle f(x)|x\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{Car } B \text{ est une bon de } E.\\ &> 0\end{aligned}$$

car $(\forall i, \lambda_i>0)$ et $(\exists i_0\in[\![1,n]\!], x_{i_0}\neq 0)$ puisque $x\neq 0$ $\square$

$\square$

Déf 3

1) Une matrice symétrique réelle A est dite **positive** si et ssi :

$$\forall X\in M_{n1}(\mathbb{R}),\ \langle AX|X\rangle \geq 0$$

Càd : $$\forall X\in M_{n1}(\mathbb{R}),\ {}^tX.A.X \geq 0$$

2) Et elle est dite **définie positive** si et ssi :

$$\forall X\in M_{n1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ \langle AX|X\rangle > 0$$

Càd : $$\forall X\in M_{n1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ {}^tX.A.X > 0$$

Notations

1) $S_n^+(\mathbb{R})$: L'ensemble des matrices symétriques réelles positives.
2) $S_n^{++}(\mathbb{R})$: L'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Prop 4

Une matrice symétrique réelle est positive (resp. définie positive) si et ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Fin