Centrale maths-2 2015

Partie I: Représentation intégrale de sommes de séries

I.A. -

(**I.A.1**) Pour $n \geqslant 2$, on a

$$a_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Soit $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, la série $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ est convergente

(**I.A.2**) La suite de terme général $S_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$ est convergente. Or pour tout $n \geqslant 2$, $S_n + 1 = H_n - \ln n$, donc, en posant $A = \lim_{n\to+\infty} S_n + 1$, on obtient $H_n - \ln n = A + \circ(1)$. Ainsi $H_n = \ln n + A + \circ(1)$, puis $H_n \sim \ln n$

I.B. Soit $r \in \mathbb{N}$. On a $\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln n}{n^r}$, on distingue deux cas

- Si $r \leqslant 1$, alors $\frac{1}{n} = \circ\left(\frac{\ln n}{n^r}\right)$, donc la série diverge
- Si $r \geqslant 2$, on a $\frac{\ln n}{n^2} = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{n}^3}\right)$, donc la série converge, par le critère de Riemann

Bref la série considérée converge si, et seulement, si $r \geqslant 2$

I.C. -

(**I.C.1**) Les fonctions considérées sont développables en série entière avec

$$\forall t \in [-1, 1[, \quad \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

et

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

Les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} t^n$ ont même rayon de convergence $R = 1$

(**I.C.2**) Le produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière dont le développement est fourni par le produit de Cauchy

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

I.D. -

(**I.D.1**) L'application $t \longmapsto t^p (\ln t)^q$ est continue sur $]0, 1]$, avec $t^p (\ln t)^q = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Donc l'application considérée est intégrable sur $]0, 1]$, en particulier l'intégrale $I_{p,q}$ existe.

(**I.D.2**) Les deux applications $t \longmapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \longmapsto (\ln t)^q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$, alors par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{p,q}^{\varepsilon} &= \int_0^1 \left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right)' (\ln t)^q \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln t)^q\right]_{\varepsilon}^{1} - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p (\ln t)^{q-1} \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}
\end{aligned}$$

(I.D.3) Les deux intégrales $I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}$ sont convergentes, donc les fonctions $\varepsilon \in]0,1[\longmapsto I^{\varepsilon}_{p,q-1}$ et $\varepsilon \in]0,1[\longmapsto I^{\varepsilon}_{p,q}$ admettent des limites respectives $I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}$ en 0^+. Or $\dfrac{\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q}{p+1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$, alors par passage à la limite dans l'égalité précédente,on obtient $I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$

(I.D.4) Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre par récurrence $q \in \mathbb{N}$ que $I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$

- Pour $q = 0$, on a bien $I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 t^p \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}$
- Soit $q \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente on a

$$I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q} \overset{(HR)}{=} -\frac{q+1}{p+1}\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}} = \frac{(-1)^{q+1}(q+1)!}{(p+1)^{q+2}}$$

I.E. Il s'agit d'une application directe du théorème de la convergence dominée pour les séries :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \longmapsto a_n t^n (\ln t)^{r-1}$ est continue et intégrable sur $]0,1[$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ de somme $t \longmapsto (\ln t)^{r-1} f(t)$ qui est continue sur $]0,1[$, car f est développable en série entière
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = |a_n| \int_0^1 t^n \left|\ln(t)^{r-1}\right| \mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{(n+1)^r}(r-1)!$. Par hypothèse $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)| \,\mathrm{d}t$ converge

D'après le théorème de convergence dominée on peut intervertir somme et intégrale. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} \\ &= (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^r}\end{aligned}$$

I.F. -

(I.F.1) L'application $f : t \longmapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$, vue en question **I.C**, est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$. En outre, d'après la question **I.B**, la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{H_n}{(n+1)^r}$ converge puisque $r \geqslant 2$. On applique donc le résultat de la question **I.E** et on obtient la formule

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

(I.F.2) Les fonctions $t \longmapsto (\ln t)^{r-1}$ et $t \longmapsto \dfrac{-(\ln(1-t))^2}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Avec

- $(\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \underset{0^+}{\sim} t^2(\ln t)^{r-1} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$
- $(\ln t)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \underset{1^-}{\sim} (t-1)^{r-1}(\ln(1-t))^2 \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$

Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (\ln t)^{r-1}\left(\frac{\ln(1-t)^2}{-2}\right)'\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[(\ln t)^{r-1}\left(\frac{\ln(1-t)^2}{-2}\right)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \left((\ln t)^{r-1}\right)'\frac{\ln(1-t)^2}{-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{r-1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}\ln(1-t)^2}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$

(I.F.3) Pour $r = 2$, on obtient $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Via le changement de variable $t = 1-u$ ($u \longmapsto 1-u$ est une bijection de $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur lui-même), on obtient

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

On applique le résultat de la question **I.E**, avec $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$, les a_n valent 1 et $r = 3$. Alors

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \zeta(3)$$

Partie II: La fonction β

II.A. La fonction Γ

(II.A.1) Soit $x > 0$. On a $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$
Au voisinage de 0 : On a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc intégrable en 0 car $1-x<1$.
Au voisinage de $+\infty$: On a $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable en $+\infty$.
On déduit que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

(II.A.2) L'application $u \longmapsto \dfrac{u}{\alpha}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, donc les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{\alpha^x}e^{-u}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et puisque la deuxième converge, alors la première l'est aussi et on a l'égalité des valeurs, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$$

II.B. La fonction β et son équation fonctionnelle

(II.B.1) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.
En 0^+ : On a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}$, elle est intégrable en 0^+ car $1-x<1$
En 1^- : On a$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1}$, elle est intégrable en 1^- car $1-y<1$
Elle est donc intégrable sur $]0,1[$, en particulier $\beta(x,y)$ existe

(II.B.2) Égalité obtenue avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1-t$, qui est une bijection de $\mathcal{C}^1$ de $]0,1[$ sur lui-même.

(II.B.3) Les fonctions $t \longmapsto t^x$ et $t \longmapsto \dfrac{-(1-t)^y}{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Avec $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$. Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x\left(\frac{(1-t)^y}{-y}\right)'\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[t^x\left(\frac{(1-t)^y}{-y}\right)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (t^x)'\,\frac{(1-t)^y}{-y}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\beta(x,y+1)
\end{aligned}$$

Soit $\beta(x,y+1) = \dfrac{y}{x}\beta(x+1,y)$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y)+\beta(x,y+1) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t.t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1-t).t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \beta(x,y)
\end{aligned}$$

Il vient donc $\beta(x,y) = \left(1+\dfrac{y}{x}\right)\beta(x+1,y) = \dfrac{x+y}{x}\beta(x+1,y)$.
Enfin

$$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

(**II.B**.4) D'après la formule précédente $\beta(x+1,y+1) = \dfrac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1)$ et par symétrie $\beta(x,y+1) = \beta(y+1,x) = \dfrac{y}{y+x}\beta(y,x)$, on remplace la dernière formule dans la première on obtient

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$$

II.C. Relation entre la fonction β et la fonction Γ

(**II.C**.1) On suppose que $\forall x,y>1,\ \beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
Soit $x,y>0$, on a

$$\beta(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\beta(x+1,y+1)$$

Comme $x+1$ et $y+1$ sont strictement supérieurs à 1 :

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

Après substitution et simplification : $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(**II.C**.2) $u \mapsto t = \dfrac{u}{1+u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$. Donc

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1}\frac{1}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

(**II.C**.3) $F_{x,y}$ est une fonction croissante et $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ F_{x,y}(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,\mathrm{d}u \leqslant \Gamma(x+y)$.

(**II.C**.4) L'application $\varphi : (a,u) \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}\left((1+u)a\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^2$ et vérifie

$$\forall (a,u)\in\mathbb{R}_+^2,\quad |\varphi(a,u)| \leqslant \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$$

Où $u \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

(**II.C**.5) Soit (a_n) une suite de réels positifs de limite $+\infty$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $f_n : u\in\mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}\left((1+u)a_n\right)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. La suite (f_n) converge simplement vers $f : u \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall u\in\mathbb{R}_+,\quad |f_n(u)| \leqslant \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y)$$

Où $u \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} G(a_n) &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a_n\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a_n\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)\,\mathrm{d}u \\
&= \beta(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} G(a_n) = \beta(x,y)\Gamma(x+y)$. Ceci vrai pour toute suite (a_n) de réels positifs de limite $+\infty$, donc par la caractérisation séquentielle de la limite G admet $\beta(x,y)\Gamma(x+y)$ limite en $+\infty$

(**II.C.6**) Soit $[c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$

- Pour tout $a \in [c,d]$, l'application $u \longmapsto \varphi(a,u) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$
- φ admet une dérivée partielle par rapport à a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} : (a,u) \longmapsto a^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)a}$$

qui est continue sur $[c,d]\times\mathbb{R}_+$
- Pour tout $(a,u) \in [c,d]\times\mathbb{R}_+$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant d^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)c}$$

où $u \longmapsto u^{x-1}e^{-(1+u)c}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

D'après le théorème de convergence dominée la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$. En déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$

(**II.C.7**) Soit $a > 0$. D'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
G'(a) &= \int_0^{+\infty} a^{x+y-1}u^{x-1}e^{-(1+u)a}\,\mathrm{d}u \\
&= a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-ua}\,\mathrm{d}u \\
&= a^{x+y-1}e^{-a}\frac{\Gamma(x)}{a^x} = a^{y-1}e^{-a}\Gamma(x)
\end{aligned}$$

(**II.C.8**) Soit $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon \leqslant a$, alors

$$G(a) - G(\varepsilon) = \Gamma(x)\int_\varepsilon^a t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Par continuité de G et de sa nullité en 0 on a $G(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} G(0) = 0$. D'autre part, $G(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \beta(x,y)\Gamma(x,y)$. Ainsi

$$\beta(x,y)\Gamma(x,y) = \Gamma(x)\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

D'où la relation $(\mathcal{R})$

Partie III: La fonction digamma

III.A. Soit $\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(\Gamma(x))$. Pour $x > 0$, on a

$$\Psi(x+1) = \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x\Gamma(x)) = \Psi(x) + \ln(x)$$

Par dérivation $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$. Soit $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$

III.B. **Sens de variation de ψ**

(**III.B.1**) Par les théorèmes généraux $\beta : (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \longmapsto \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ admet une dérivée partielle par rapport à y, donc $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.
Pour $x, y > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)^2} \\ &= \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= \psi(y)\beta(x,y) - \psi(x+y)\beta(x,y) \\ &= \beta(x,y)\left(\psi(y) - \psi(x+y)\right)\end{aligned}$$

(**III.B.2**) Soit $y, y' > 0$ tels que $y < y'$, pour tout $t \in]0,1[$ l'application $z \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto (1-t)^z$ est strictement décroissante, donc $(1-t)^{y'} \leqslant (1-t)^y$, en multipliant par t^{x-1} puis en intégrant : $\beta(x,y') \leqslant \beta(x,y)$. Ainsi l'application considérée est décroissante

(**III.B.3**) Pour $x, y > 0$, le signe de $\psi(y) - \psi(x+y)$ est celui de $\dfrac{\partial \beta}{\partial x}(x,y)$ qui est négative, donc ψ est croissante

III.C. **Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions**

(**III.C.1**) Soit $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\psi(k+1) - \psi(k) = \dfrac{1}{k}$ et $\psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \dfrac{1}{x+k}$. En sommant de k allant de 1 à n, alors par télescopage

$$\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \psi(x+n+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$$

Soit $\psi(1) = \psi(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\psi(x+1) = \psi(n+x+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$. Enfin, par différence

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

(**III.C.2**) L'inégalité de gauche est assurée par la croissance de ψ. En outre, $n+x+1 \leqslant n+p+1$, donc

$$\psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant \psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1}$$

Pour tout $k \in [\![n, n+p]\!]$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc

$$H_{n+p} - H_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

Ainsi

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

(III.C.3) Soit $x > -1$. D'après les encadrements précédents $\psi(n+x+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors de l'égalité

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

on tire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+x}\right)$ ainsi sa somme $\psi(1+x) - \psi(1)$. Donc

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

III.D. Un développement en série entière

(III.D.1) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n : x \in [-1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

- u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [-1,+\infty[, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}$$

- La série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge simplement de somme g
- Pour tout segment $[a,b] \subset [-1,+\infty[$ et $k \geqslant 1$, on a $\forall x \in [a,b]$:

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \sim \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Donc g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [-1,+\infty[, \quad g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}$$

En particulier $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(k)}(0) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{n^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\,(\zeta(k+1) - 1)$

(III.D.2) g est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[\subset [-1,+\infty[$ et $\forall t \in]-1,1[$,

$$\left|g^{(n+1)}(t)\right| = \left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(k+x)^{n+2}}\right| \leqslant (n+1)!\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^{n+2}} \leqslant (n+1)!\zeta(2)$$

L'inégalité de Taylor Lagrange fournit donc

$$\left|g(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \zeta(2)\,|x|^{n+1}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, $|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la série de Taylor $\sum_{n\geqslant 0}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge de somme g. Ceci montre que g est développable en série entière sur $]-1,1[$

(III.D.3) Soit x dans $]-1,1[$, on écrit

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + g(x)$$

D'une part $1 - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n$ et d'autre part, vu que $g(0) = 0$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\zeta(n+1) - 1)x^n$$

Ainsi l'égalité

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n$$

Partie IV: Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

IV.A. Une relation entre B et ψ

β admet une dérivée partielle en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^{*2}$ et

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)=\beta(x,y)\left(\psi(y)-\psi(x+y)\right)$$

Une autre fois par les théorèmes généraux $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à y en tout point (x,y) et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)\left(\psi(y)-\psi(x+y)\right)+\beta(x,y)\left(\psi'(y)-\psi'(x+y)\right)\\ &= \beta(x,y)\left(\psi(y)-\psi(x+y)\right)^2+\beta(x,y)\left(\psi'(y)-\psi'(x+y)\right)\end{aligned}$$

En particulier

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,1)=\beta(x,1)\Big(\left(\psi(1)-\psi(x+1)\right)^2+\left(\psi'(1)-\psi'(x+1)\right)\Big)$$

Avec $\beta(x,1)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$, on obtient

$$xB(x)=\left(\psi(1+x)-\psi(1)\right)^2+\left(\psi'(1)-\psi'(1+x)\right)$$

Ou encore $B(x)=\dfrac{\left(\psi(1+x)-\psi(1)\right)^2+\left(\psi'(1)-\psi'(1+x)\right)}{x}$, donc par les théorèmes généraux B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

IV.B. Expression de S_r à l'aide de la fonction B

(IV.B.1) Soit $x>0$, on considère la fonction $f:(y,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\,]0,1[\,\longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. Une telle fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 par rapport à y, avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t)=\ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \text{ et }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t)=\left(\ln(1-t)\right)^2t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

telles que

- Pour tout $y\in\mathbb{R}_+^*$, les applications $t\longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $t\longmapsto \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sont continues et intégrables sur $]0,1[$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}:(y,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\,]0,1[\,\longmapsto \ln^2(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue
- Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$, pour tout $(y,t)\in[a,b]\times\,]0,1[$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t)\right|\leqslant\left(\ln(1-t)\right)^2t^{x-1}(1-t)^{a-1}$$

L'application $\varphi:t\in]0,1[\longmapsto\left(\ln(1-t)\right)^2t^{x-1}(1-t)^{a-1}$ est continue positive
– En 0, on a $\varphi(t)\sim t^{x+1}$, donc elle est prolongeable par continuité en 0
– En 1^-, on a $\varphi(t)=\circ\left(\dfrac{1}{(1-t)^\delta}\right)$, où $\delta\in\,]1-a,1[$
Donc elle est intégrable, ainsi par le théorème de dérivation sous signe intégrale,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y)=\int_0^1\left(\ln(1-t)\right)^2t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

En particulier

$$B(x)=\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,1)=\int_0^1\left(\ln(1-t)\right)^2t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

(IV.B.2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(t))^p (\ln(1-t))^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

(IV.B.3) Il suffit de démontrer, pour tout $r \geqslant 2$, que $\lim\limits_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \dfrac{(\ln(t))^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$.
Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \longmapsto (\ln(t))^p (\ln(1-t))^2 t^{x_n-1}$.
La suite (f_n), de fonctions continues sur $]0,1[$, converge simplement vers $t \longmapsto \dfrac{(\ln(t))^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}$ qui est continue sur $]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| = |\ln(t)|^p (\ln(1-t))^2 t^{x_n-1} \leqslant \frac{|\ln(t)|^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}$$

L'application $\varphi : t \longmapsto \dfrac{|\ln(t)|^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}$ est continue positive sur $]0,1[$

- En 0, on a $\varphi(t) \sim t\,|\ln(t)|^{r-2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$, donc elle est prolongeable par continuité en 0
- En 1^-, on a :

$$\varphi(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{r-2}\ln(1-t)^2 \underset{1^-}{=} \circ\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

Une telle fonction φ est intégrable sur $]0,1[$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} B^{(r-2)}(x_n) = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$$

Enfin, par la caractérisation séquentielle de la limite, $B^{(r-2)}$ admet une limite en 0 et

$$\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$$

(IV.B.4) D'après la question précédente $S_2 = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} B(x)$. D'après les questions **IV.A** et **III.D**, $\lim\limits_{x\to 0^+} B(x) = -\psi''(1)$ et $\psi''(1) = -2\zeta(3)$. Ainsi $S_2 = \zeta(3)$

IV.C. -

(IV.C.1) L'application $x \longmapsto \psi(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, donc, par les théorèmes généraux, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $n \geqslant 2$, par la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\psi(1+x)-\psi(1))^{(k)}(0)(\psi(1+x)-\psi(1))^{(n-k)}(0) - \psi'^{(n)}(1)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1)
\end{aligned}$$

(IV.C.2) Soit $r \geqslant 3$, par la formule de Leibniz $\varphi^{(r-1)}(x) = xB^{(r-1)}(x) + (r-1)B^{(r-2)}(x)$.
Cette formule permet de donner $\lim\limits_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x) = \dfrac{1}{r-1}\varphi^{(r-1)}(0)$. Avec

$$\begin{aligned}
\varphi^{(r-1)}(0) &= \sum_{k=1}^{r-2} C_{r-1}^k \psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1)\\
&= \sum_{k=1}^{r-2} C_{r-1}^k (-1)^{k+1}\zeta(k+1)(-1)^{r-k}\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\zeta(r+1)\\
&= (-1)^{r+1}(r-1)!\sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\zeta(r+1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2S_r &= \frac{(-1)^r}{(r-2)!}\frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1} \\ &= r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k) \end{aligned}$$