

Pont vers Spé : Réduction des Matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$.

Notons pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Définitions :

- i) χ_A s'appelle le polynôme caractéristique de A .
- ii) Les racines du polynôme χ_A s'appellent les valeurs propres de A .
- iii) $S_p(A)$ s'appelle le spectre de A , c'est l'ensemble des valeurs propres de A .
- iv) Si $\lambda \in S_p(A)$, on note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$. C'est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

1) Montrer que :

- i) $\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow (\exists X_0 \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, AX_0 = \lambda X_0)$
- ii) Si A et B sont deux matrices semblables, alors :
 - a) $\chi_A = \chi_B$
 - b) $S_p(A) = S_p(B)$
- iii) Ecrire $\dim(E_\lambda(A))$ en fonction de n et $\text{rg}(A - \lambda I_n)$.

2) On pose dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer $\chi_A(\lambda)$, et donner-le sous forme factorisée.
Déterminer les valeurs propres de A .
- b) Déterminer une base pour chaque sous-espace propre de A .
Notons S la famille formée par ces trois bases, et B_c la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- c) Vérifier que S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
Notons P la matrice de passage de B_c à S .
- d) Calculer P^{-1} .
- e) Ecrire A en fonction de P et D ; où D est une matrice diagonale à préciser.
- f) En déduire A^n sous forme de tableau matriciel, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

g) Considérons les trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède le terme général de chacune de ces suites.

3) Répondre à la question 2)a) dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

CORRECTION

☆ $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$: le *polynôme caractéristique* de A .

☆ $S_p(A)$: le *spectre* de A ; c'est l'ensemble des valeurs propres de A .

☆ $\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow (\lambda \text{ est une valeur propre de } A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

☆ Soit $\lambda \in S_p(A)$. $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle le *sous-espace propre* de A associé à la valeur propre λ .

1) i) $\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda I_n - A) \text{ n'est pas inversible}$$

$$\Leftrightarrow \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, (\lambda I_n - A)X = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX = \lambda X)$$



A inversible

$\Downarrow$
 $\ker(A) = \{0\}$

$\ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow$
 $(\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0 \Rightarrow X = 0)$

$\ker(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow$
 $(\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } AX = 0 \text{ et } X \neq 0)$
 $\Leftrightarrow (\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, AX = 0)$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :
 $X \in \ker(A) \Leftrightarrow A \cdot X = 0$

↓
produit matriciel
non pas " $A(X)$ "

1) ii) Supp que A et B sont semblables.

a) M que $\chi_A = \chi_B$:

$\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On veut montrer que $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$.

On a :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \det(\lambda I_n - P B P^{-1}) \\ &= \det(\lambda P P^{-1} - P B P^{-1}) \\ &= \det(P(\lambda I_n - B)P^{-1}) \\ &= \det(\lambda I_n - B) \quad \left(\begin{array}{l} \text{deux matrices semblables ont} \\ \text{le même déterminant} \end{array} \right) \\ &= \chi_B(\lambda)\end{aligned}$$

b) M que $S_p(A) = S_p(B)$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in S_p(A) &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_B(\lambda) = 0 \quad (\text{car } \chi_A = \chi_B) \\ &\Leftrightarrow \lambda \in S_p(B)\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue

Remarque :

On a ainsi montré que si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.

iii)

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\ker(A - \lambda I_n)) \\ = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$$

$\dim(\ker(A)) + \text{rg}(A) = n$
Théorème du rang
matriciel

2) Ici: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $\chi_A(\lambda) = ?$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) \\ = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

ooo

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \quad \left(\text{on le factorise pour tirer} \right. \\ \left. \text{ses racines, qui sont les} \right. \\ \left. \text{valeurs propres} \right) \\ = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow \text{on factorise via } \Delta$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \quad \square$$

$$S_p(A) = \{0, 1, 2\} \quad ; \text{ les racines du polynôme } \chi_A.$$

b) i) Une base du sous-espace propre $E_2(A)$:

$$E_2(A) = \ker(A - 2I_3).$$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3)$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

D'où $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$; $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base.

ii) On trouve de même que :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base.}$$

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base.}$$

c) $S = (U, v, w)$, où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vérifions que S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$:

On peut faire via le déterminant par exemple :

$$\det_{B_c}^B(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

D'où S est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

d) $P = P_{B_c, S} = \text{mat}_{B_c}^B(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot {}^t G_m(P)$$

$$\det(P) = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; G_m(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t G_m(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D'_{\text{où}}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On a : $A = \text{mat}_{B'_c}^B(f)$; où B'_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons $u' = (1, 0, 1)$; $v' = (1, 1, 1)$; $w' = (-1, 1, 0)$
 $S' = (u', v', w')$

On a



$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow f(u') = 0 \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v') = v' \\ A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(w') = 2w' \end{aligned}$$

D' où $\text{mat}_{S'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (notons-la D elle est bien diagonale)

Et on a :

$$\text{mat}_{B'_c}(f) = P \text{ mat}_{S'}(f) P^{-1}$$

D' où

$$A = P D P^{-1}$$

$$\text{avec } D = \text{diag}(0, 1, 2)$$

1) Avec $A = P D P^{-1}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P D^n P^{-1}$$

$$\text{Et } D = \text{diag}(0, 1, 2) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \text{diag}(0, 1, 2^n))$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

g) Considérons les trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède le terme général de chacune de ces suites.

L'idée est très classique. ⚠

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = A X_n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2^n & 1 & -1-2^n \\ 1-2^n & 1 & -1+2^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Càd : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} x_n = 2+2^{n+1} \\ y_n = 2-2^{n+1} \\ z_n = 2 \end{cases}$$

3) a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Très important ⚠

La détermination du polynôme caractéristique et les valeurs propres (qui sont ses racines). Je verrai avec vous ici une démarche qui marche toujours.

Des fois vous pouvez faire mieux, mais celle-ci comme j'ai dit marche toujours.

$$A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(\lambda) = ?$

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 14 & 8 & -5 \\ -18 & \lambda - 11 & 6 \\ 12 & 6 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

0
x
o

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

$$= \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) \quad (\text{factorisation rapide})$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$Sp(A) = \{1, -1, 2\}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = ?$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 & 6 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

On veut le factoriser. La piste qui marche toujours est de déterminer une racine évidente du polynôme ; en général on la cherche parmi $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.

2 est une racine de $\chi_A(\lambda)$.

$$\text{Alors } \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2) \times Q(\lambda)$$

$\hookrightarrow$ polynôme de degré 2, qu'on peut déterminer via la division euclidienne de

$$(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) \text{ par } (\lambda - 2). \text{ (vous maîtrisez ça)}$$

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2) \underbrace{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)}_{\text{on factorise avec } \Delta}$$

Donc

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$$

$$Sp(A) = \{2, 3\}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = ?$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

o
o
o

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$

$\lambda = 2$ est une racine de $\chi_A(\lambda)$.

$$\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \quad \left(\begin{array}{l} \text{divisibilité comme} \\ \text{ci-dessus} \end{array} \right)$$

Dici

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$S_p(A) = \{2\}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) \quad (\text{è a dirà così facile})$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 3 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-4) + 6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

$$S_p(A) = \{1, 2\}$$

Fin