jeu. 31 oct.

ours evn part1

Notons $N_1 \sim N_2$ pour dire que N_2 et N_2 sont équivalentes.

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Exercice

Montrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

$\| \ \|_1 \leq c \| \ \|_2$, $\| \ \|_2 \leq d \| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_\infty \leq e \| \ \|_1$

$\| \ \|_1$

$\| \ \|_2$

$\| \ \|_\infty$

$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$

$\alpha' = ?$ $\boxed{\alpha' \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \beta' \|x\|_\infty}$? $\beta' = ?$

$\alpha'' \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \beta'' \|x\|_\infty$

...ace

...ntrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à ...x équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

$\| \ \|_1 \leq c \| \ \|_2$, $\| \ \|_2 \leq d \| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_\infty \leq e \| \ \|_1$

$\| \ \|_1 \leq c \underbrace{\| \ \|_2}_{\leq d \| \ \|_\infty} \Rightarrow \| \ \|_1 \leq cd \| \ \|_\infty$

$\alpha' = \frac{1}{e}$ $\boxed{\alpha' \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \beta' \|x\|_\infty}$? $\boxed{\beta' = cd}$

$\| \ \|_\infty \leq e \| \ \|_1 \Rightarrow \frac{1}{e} \| \ \|_\infty \leq \| \ \|_1$

Cours evn part1

$\sim$ est une relation d'équivalence ...

Exercice

Montrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

$\|\ \|_1 \leq C \|\ \|_2$ [redacted]

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.1 \underset{\text{I-C-Sch}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}_{=\|x\|_2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}$$

$|x_i|^2 = x_i^2$ car $x_i \in \mathbb{R}$

$$\leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \longrightarrow C=\sqrt{n}$$

$0 \leq a$, $\cancel{a \leq a^n}$

$\cancel{\left(\sum_i a_i\right)^2 = \sum_i a_i^2}$

Exercice

Montrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

[redacted] $\| \ \|_2 \le d \| \ \|_\infty$ [redacted]

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a :

$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}(|x_i|)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\|x\|_\infty^2}_{\text{cste}}}$$

$\sqrt{\ }$ $|x_i|$

$$= \sqrt{n\cdot\|x\|_\infty^2}$$

$\forall i, |x_i|^2 \le \|x\|_\infty^2$

$$= \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

$\to d = \sqrt{n}$

Exercice

Montrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

[redacted] et $\| \ \|_\infty \leq e \| \ \|_1$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \cdot \|x\|_1$$

$$\boxed{e = 1}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

Prop 3 (Convergence)

1) $(x_n)_n$ est converge si et ssi toutes ses suites composantes convergent.

2) Le cas échéant, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{d} \left(\lim_{n\to+\infty} x_n^i\right)\cdot \varepsilon_i$$

Démo

$$\sum_{i=1}^{d} \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} x_n^i\right)}\cdot \varepsilon_i$$

$\dim E = 2$

$B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base de E.

$x_n = x_n^1 \varepsilon_1 + x_n^2 \varepsilon_2$

$(x_n)_n$ CV $\Leftrightarrow (x_n^1)_n$ et $(x_n^2)_n$ cvgent

auquel cas, on aura:

$\lim_n x_n = (\lim_n x_n^1)\cdot \varepsilon_1 + (\lim_n x_n^2)\cdot \varepsilon_2$

Prop 3 (Convergence)

1) $(x_n)_n$ est converge si et ssi toutes ses suites composantes convergent.

2) Le cas échéant, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{d} \left(\lim_{n\to+\infty} x_n^i\right)\cdot \varepsilon_i$$

Démo

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\lim_{n\to+\infty} x_n^i\right)\cdot \varepsilon_i$$

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-esp vect

$B_c = (1, i)$ base de $\mathbb{C}$ (can)

$(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$x_n = Re(x_n)\cdot 1 + Im(x_n)\cdot i$

→ les suites composantes de (x_n) dans la base can $(1, i)$: $(Re(x_n))_n$ et $(Im(x_n))_n$

→ (x_n) CV $\Longleftrightarrow$ $(Re(x_n))_n$ et $(Im(x_n))$ CV

↳ On retrouve le SUP

→ Le cas échéant :

$$\lim_n x_n = \left(\lim_n Re(x_n)\right)\cdot 1 + i\cdot\left(\lim_n Im(x_n)\right)$$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\lim_n \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_n a_n & \lim_n c_n \\ \lim_n b_n & \lim_n d_n \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin n}{n} & n e^{-n} \\ \frac{(-1)^n}{n} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = ?$$

Justification

Cf. (prop 1), avec $E = M_2(\mathbb{K})$

$B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base can de $M_2(\mathbb{K})$.

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ et $(d_n)_n$ les composantes dans B.

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} \frac{\sin n}{n} & n e^{-n} \\ \frac{(-1)^n}{n} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

Cours evn part1

Exemple 3 (cas général)

Soit $(A_n)_n$ une suite matricielle à valeurs dans $M_p(\mathbb{K})$.

Notons pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $A_n = \left(A_n^{ij}\right)_{1 \le i,j \le p}$.

1) $(A_n)_n$ bornée $\iff$ $\left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (A_n^{ij})_n \text{ est bornée}\right)$

2) i) $(A_n)_n$ converge $\iff$ $\left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (A_n^{ij})_n \text{ converge}\right)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\lim_n A_n = \left(\lim_{n\to+\infty} A_n^{ij}\right)_{1 \le i,j \le p}}$$

$$A_n = \sum_{1 \le i,j \le p} A_n^{ij}\, \underbrace{E_{ij}}_{\text{la base cano}}$$

$$\sum_{1 \le i,j \le p} \alpha_{ij} E_{ij} = \left(\alpha_{ij}\right)_{1 \le i,j \le p}$$

$$\lim_n A_n = \sum_{1 \le i,j \le p} \left(\lim_{n\to+\infty} A_n^{ij}\right) \cdot E_{ij} = \left(\lim_{n\to+\infty} A_n^{ij}\right)_{1 \le i,j \le p}$$

Exemple 3 (cas général)

Soit $(A_n)_n$ une suite matricielle à valeurs dans $M_p(\mathbb{K})$.

Notons pour chaque $n \in \mathbb{N}$: $A_n = \left(A_n^{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$

1) $(A_n)_n$ bornée $\Leftrightarrow \left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (A_n^{i,j})_n \text{ est bornée}\right)$

2) i) $(A_n)_n$ converge $\Leftrightarrow \left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (A_n^{i,j})_n \text{ converge}\right)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\lim_n A_n = \left(\lim_{n \to +\infty} A_n^{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}}$$

$A_n = (A_n^{i,j})_{i,j}$

Clés : 1) $\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)_{i,j} \underline{\underline{\forall i,j}} \lim_{n\to\infty} A_n^{i,j}$

2) $\lim_n A_n = A \Leftrightarrow \forall i,j \in [\![1,p]\!],\ \lim_n A_n^{i,j} = A^{i,j}$

Clé

Exo : $A \in M_d(\mathbb{K})$; $(A_n)_n \subset M_d(\mathbb{K})$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} (\det(A_n)) = \det(A)$

$\Downarrow$?

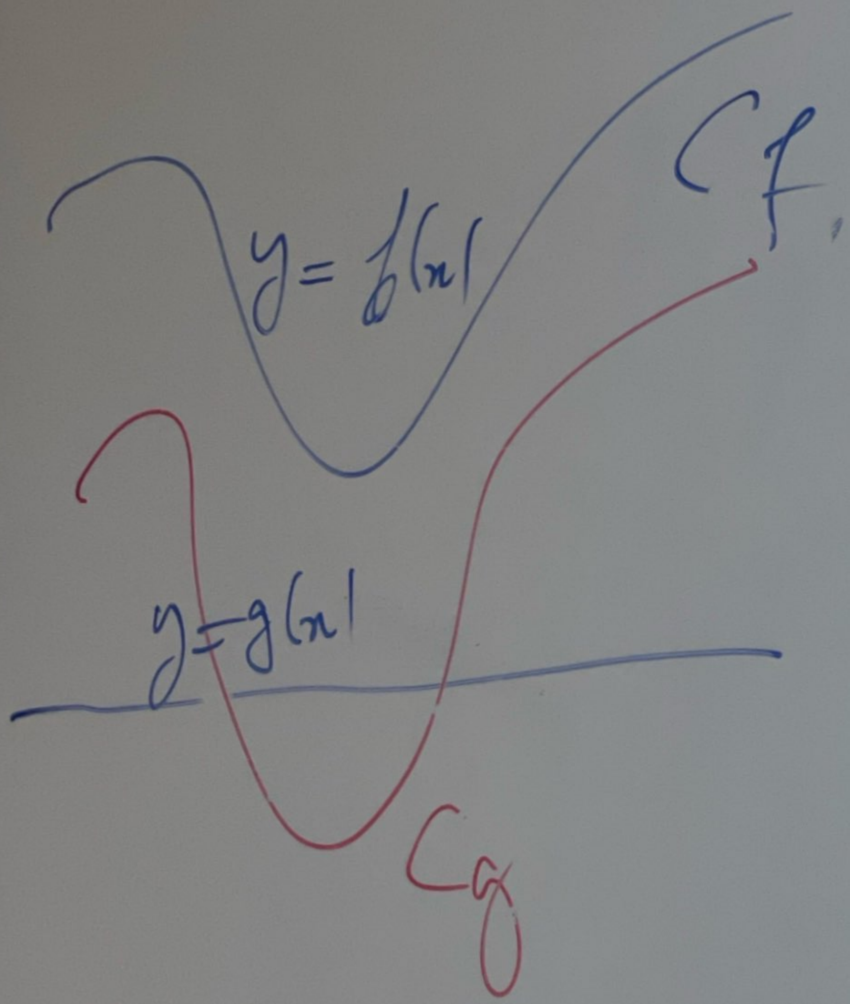
$\lim_{n\to+\infty} (\operatorname{tr}(A_n)) = \operatorname{tr}(A)$

Exercice

① On observe d'après cette courbe que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \text{sh}(x) \geqslant x$$

Montrer cette inégalité.



$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq f(x)$

Sol: (Très Difficile)

Posons $f(x) = sh(x) - x$

M.q: $(\forall x \geq 0, f(x) \geq 0)$

$f'(x) = Ch(x) - 1 \geq 0$

Tab_Var:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$0 \nearrow$	

D'après le Tab de Var on a:

$(\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) \geq 0)$ CQFD