

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Problème d'algèbre

CORRECTION

- 1.1** Soit B la matrice $\frac{4}{3}A$, qui est la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme $\varphi = \frac{4}{3}\psi$. Il est facile de vérifier que la matrice B est orthogonale, ou bien en calculant $B^t B$ et en montrant que l'on obtient I_3 , ou bien en montrant que les vecteurs colonnes de B forment une base orthonormale de l'espace (on calcule alors les normes et les différents produits scalaires). Ainsi, φ est une isométrie de E . En outre, $\det B = 1$, ce qui prouve que φ est une rotation.

L'axe de cette rotation est donnée par l'ensemble des points invariants. Or,

$$\text{Mat}(\varphi - \text{Id}_E) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

On résout alors le système produit par l'équation $\varphi(x, y, z) - \text{Id}_E(x, y, z) = (x, y, z)$. Les solutions de cette équation sont les vecteurs $(x, x, x) = x(e_1 + e_2 + e_3)$. L'axe de la rotation est donc la droite $\mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Il reste à prouver qu'il s'agit d'un demi-tour. Le vecteur $e_1 - e_2$ est orthogonal à l'axe de la rotation.

En outre, $\varphi(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2)$. φ est donc bien un demi-tour.

- 1.2** On a

$$\psi = \frac{3}{4}\varphi = \left(\frac{3}{4}\text{Id}_E\right) \circ \varphi = \varphi \circ \left(\frac{3}{4}\text{Id}_E\right).$$

ψ est donc la composée du demi-tour précédent, et de l'homothétie vectorielle de rapport $3/4$.

- 2.1** ψ est une bijection car c'est la composée de deux bijections. En outre, puisque $\frac{4}{3}\psi$ est une isométrie, pour tout x de E , on a :

$$\left\| \frac{4}{3}\psi(x) \right\| = \|x\|.$$

On en déduit que

$$\|\psi(x)\| \leq \frac{3}{4}\|x\|.$$

Ainsi, $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

- 2.2** Non, car $\|\text{Id}_E(x)\| = \|x\|$!

- 2.3** Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, les constantes associées étant respectivement k_1, k_2 , alors

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \circ \varphi_2(x)\| &\leq k_1 \|\varphi_2(x)\| \\ &\leq k_1 k_2 \|x\|, \end{aligned}$$

et on a bien $k_1 k_2 \in [0, 1[$. Pour autant, $\mathcal{S} \cap GL(E)$ n'est pas un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, car cette partie ne contient pas l'élément neutre.

- 2.4** Si $x \in \ker(\varphi - \text{Id}_E)$, on a

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| \text{ et } \|\varphi(x)\| \leq k\|x\|.$$

On a donc $\|x\| \leq k\|x\|$. Ceci n'est possible que si $x = 0$. Puisque $\varphi - \text{Id}_E$ est un endomorphisme de dimension finie, $\varphi - \text{Id}_E \in GL(E)$.

- 2.5** Le sens direct est évident. Pour la réciproque, si $x \in E$, $x \neq 0$, on pose $y = \frac{x}{\|x\|}$. On a

$$\|y\| = 1 \implies \|\varphi(y)\| \leq k.$$

Par linéarité, on obtient

$$\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|.$$

Cette égalité reste vraie si $x = 0$, et donc $\varphi \in \mathcal{S}$.

- 2.6** Soit (u_1, u_2, u_3) cette base orthonormée, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les éléments diagonaux. On pose

$$k = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \in [0, 1[.$$

Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$. Rappelons que l'on a

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1 \varphi(u_1) + x_2 \varphi(u_2) + x_3 \varphi(u_3) \\ &= \lambda_1 x_1 u_1 + \lambda_2 x_2 u_2 + \lambda_3 x_3 u_3 \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|^2 &= |\lambda_1 x_1|^2 + |\lambda_2 x_2|^2 + |\lambda_3 x_3|^2 \\ &\leq k^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\leq k^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

On obtient $\|\varphi(x)\| \leq k\|x\|$, et $\varphi \in \mathcal{S}$.

3.1 On vérifie aisément que $\|e'_1\|^2 = \|e'_2\|^2 = \|e'_3\|^2 = 1$. D'autre part,

$$(e'_1 | e'_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 - 1) = 0.$$

On montre de même que les autres produits scalaires sont nuls, ce qui achève de prouver que la base est orthonormale.

3.2 On a :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\mu(e'_1) = \frac{1}{2}e'_1$. De même, $\mu(e'_2) = \frac{2}{3}e'_2$ et $\mu(e'_3) = 0$. On en déduit que la matrice de μ dans $\mathcal{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat obtenu en 2.6 entraîne que $\mu \in \mathcal{S}$.

4.1 On a :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|\varphi_\alpha(x)\|^2 &= \alpha^2 ((x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2) \\ &= \alpha^2 (1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2). \end{aligned}$$

4.2 Les formules de changement de base (avec les matrices de passage) permettent d'exprimer facilement x_1, x_2, x_3 en fonction de x'_1, x'_2 et x'_3 :

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x'_3 \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x'_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x'_3. \end{cases}$$

On en tire :

$$x_1 - x_2 - x_3 = \frac{3}{\sqrt{3}}x'_1.$$

Ceci donne

$$\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2(1 + 3x_1'^2).$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée, et que x est de norme 1, on a $|x_1'| \leq 1$. On en déduit que :

$$\|\varphi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|.$$

On a égalité si, et seulement si, $x_1' = \pm 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x = \pm e_1'$.

4.3 D'abord, si $|\alpha| < 1/2$, la question précédente prouve clairement que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$. D'autre part, si $|\alpha| \geq 1/2$, pour $x = e_1'$, on a $\|\varphi_\alpha(x)\| \geq \|x\|$, ce qui empêche φ_α d'appartenir à $\mathcal{S}$.

5.1 Puisque f est une application affine, $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(O)M} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM} = \varphi(\overrightarrow{OM}) \\ &\iff \overrightarrow{f(O)O} = (\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM}). \end{aligned}$$

5.2 D'après la question 2.4, $\varphi - Id_E$ est inversible. Il existe donc un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{f(O)O} = (\varphi - Id_E)(\overrightarrow{u})$. Il existe donc un unique point Ω invariant par f , donné par $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{u}$.

5.3 On a :

$$\overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f(\Omega)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M}).$$

5.4.1 Comme dans le problème d'analyse, on prouve par récurrence sur n que :

$$\overrightarrow{\Omega M_n} = \varphi^n(\overrightarrow{\Omega M}).$$

On en déduit (toujours par récurrence) que

$$\|\overrightarrow{\Omega M_n}\| \leq k^n \|\overrightarrow{\Omega M_0}\|.$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0.$$

5.4.2 Soit f l'application affine définie par

$$- f(0) = (1, 1/2, 1).$$

- La partie linéaire de f est $\varphi_{1/4}$ en utilisant les notations de la question 4.

On définit la suite de points (M_n) par $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$. Les coordonnées de M_n sont exactement les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) données par l'énoncé. D'après la question précédente, f possède un unique point fixe $\Omega = (a, b, c)$ et $\|\overrightarrow{\Omega M_n}\|$ tend vers 0. En particulier, les 3 suites (x_n) , (y_n) et (z_n) convergent respectivement vers a, b et c . Reste à trouver les coordonnées de Ω qui sont solutions du système :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 \\ y &= \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1 \end{cases}$$

Par le pivot de Gauss, on trouve aisément que la seule solution du système est $(1, 1, 1)$: les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) convergent donc vers 1.

FIN
