Chap 3

Espaces vectoriels normés
Partie 1

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un $\mathbb{K}$-esp vectoriel

I) Notion de norme

1) Définition et vocabulaire

Déf

On appelle **norme** sur E toute application N définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
3) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

NB1 :

1) N se note souvent $\| \ \|$.
   $N(x)$ se notera $\|x\|$.
2) Si $\| \ \|$ est une norme sur E, on dit que $(E, \| \ \|)$ est espace vectoriel normé (evn).
3) Si $(E, \| \ \|)$ est un evn, on a :
   i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   ii) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$

NB2

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2)\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ 3)\ \forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{array}}$$

s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2)\ \forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \\ 3)\ \forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \end{array}}$$

Vocabulaire

$(\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|)$ C'est l'inégalité triangulaire.

2) Normes usuels (à retenir)

a) Normes usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Norme usuelle dans $\mathbb{R}$

La valeur absolue $|\ |$ est une norme sur $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R}, |\ |)$ est un evn

Norme usuelle dans $\mathbb{C}$

Le module $|\ |$ est une norme sur $\mathbb{C}$: $(\mathbb{C}, |\ |)$ est un evn.

b) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ (où $n \geqslant 1$)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On note :

$$\boxed{\begin{array}{l} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|) \end{array}}$$

On aura besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

Prop : (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

En général, on a :

$$\boxed{\left|\sum_{i\in I} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i\in I} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i\in I} y_i^2}}$$

Si I ensemble fini quelconque, les x_i et les y_i des réels.

Prop

$\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démo

A) $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$?

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

1) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$

$\Rightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \ |x_i| = 0$ (somme nulle de nombres positifs)

$\Rightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \ x_i = 0$

$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}$

2) Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a :

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 &= \|(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\|_1\\ &= \sum_{i=1}^{n}|\lambda x_i|\\ &= |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|x_i|\\ &= |\lambda|\,\|x\|_1\end{aligned}$$

3) Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$.

Mq que $\|x+y\|_1\leq\|x\|_1+\|y\|_1$.

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

On a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \|(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\|_1\\ &= \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(|x_i|+|y_i|\right) \; ; \text{ car } \left(\forall 1\leq i\leq n,\ |x_i+y_i|\leq|x_i|+|y_i|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|\\ &= \|x\|_1+\|y\|_1\end{aligned}$$

D'où $\|\ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. □

B) $\|\ \|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$?

$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$

1) Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned}\|x\|_2=0 &\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=0\\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=0\\ &\Rightarrow \forall 1\leq i\leq n,\ |x_i|^2=0 \text{ (somme nulle de nombres positifs)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, x_i = 0$$

$$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}$$

2) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}$$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_2 &= \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_2 \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2} \\
&= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\
&= \sqrt{|\lambda|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\
&= |\lambda| \, \|x\|_2
\end{aligned}$$

3) Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

Mq $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. ☆

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}$$

Raisonnons par équivalences :

On a :

$$☆ \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

Or : $\left(\forall 1 \leq i \leq n, \ |x_i + y_i|^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2 = |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i||y_i| \right)$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$

Pour montrer ☆ qu'on veut, il suffit de montrer que :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}}$$

Ce qui est vrai d'après la fameuse inégalité de Cauchy-Schwarz. □

D'où $\| \|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. □

C) $\| \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$?

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

1) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0$

$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \ |x_i| = 0$

$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \ x_i = 0$

$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}$

2) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

$\|\lambda x\|_\infty = \|(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\|_\infty$

$= \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda| \cdot |x_i|)$

$= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

$= |\lambda| \, \|x\|_\infty$

3) Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$.

Mq que $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

On veut mq que :

$$\max_{1\leq i\leq n} (|x_i+y_i|) \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

! Il suffit pour cela de montrer que :

$$\forall 1\leq i\leq n, \ |x_i+y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\mathrm{Sup}(A) \leq C$ $\Updownarrow$ $\forall a\in A,\ a\leq C$

Soit alors $1\leqslant i\leqslant n$. On a :

$$|x_i+y_i| \leqslant \underbrace{|x_i|}_{\leqslant \|x\|_\infty} + \underbrace{|y_i|}_{\leqslant \|y\|_\infty}$$

$$\leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\forall k,\ |x_k| \leqslant \|x\|_\infty$

D'où $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. □

c) Normes matricielles usuelles

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \ ; \ A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \ ; \ A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}}$$

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}}$$

Prop

$\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $M_n(\mathbb{K})$.

Démo

A) $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

1) $$\|A\|_\infty = 0 \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = 0$$

$$\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0$$

$$\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq n, \ |a_{ij}| = 0$$ (Somme nulle de nombres positifs)

$$\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq n, \ a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

2) $$\|\lambda A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda| \cdot |a_{ij}| \right)$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(|\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$= |\lambda| \cdot \|A\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

3) $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$?

On a :

$$\|A+B\|_\infty = \max_i \Big(\underbrace{\sum_j |a_{ij} + b_{ij}|} \Big)$$

$$\leq \quad \text{inég triang}$$

$$\leq \max_i \Big(\underbrace{\sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}|} \Big)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Et on a :

$$\forall i,\quad \left|\begin{array}{l}\sum_j |a_{ij}| \leq \|A\|_\infty \\ \sum_j |b_{ij}| \leq \|B\|_\infty\end{array}\right.$$

D'où $\forall i, \left(\sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}|\right) \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$

$$\Rightarrow \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}|\right) \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

D'où $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ $\square$

B) $\|\ \|_1$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$

Même démarche que $\|\ \|_\infty$.

C) $\|\ \|_2$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|^2}$$

1) $\|A\|_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|^2} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall 1\leq i,j\leq n,\ |a_{ij}|^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{somme nulle de}\\ \text{nombres positifs}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (\forall 1\leq i,j\leq n,\ a_{ij} = 0)$$

$$\Rightarrow A = 0$$

2) $\|\lambda A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda a_{ij}|^2}$

$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}$

$= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}$

$= \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}$

$= |\lambda|\,\|A\|_2$

$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}$

3) $\|A+B\|_2 \leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2$? ☆

On a :

$$\|A+B\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2} \; ; \; \|B\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2}$$

D'où :

$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2}$

☆ $\iff \|A+B\|_2^2 \leqslant \left(\|A\|_2 + \|B\|_2\right)^2$

$$\iff \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \leqslant \|A\|_2^2 + \|B\|_2^2 + 2\|A\|_2 \|B\|_2$$

$$\iff \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2 + 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2}$$

Or $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(|a_{ij}|+|b_{ij}|\right)^2$ (l'inég triangulaire)

$$\Rightarrow \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|\,|b_{ij}|$$

Et on a : $\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}||b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2 \sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|^2}$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

D'où

$$\boxed{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}+b_{ij}|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2 + \sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|^2 + 2\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2 \sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{ij}|^2}}$$

$\square$

Enfin, $\| \ \|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\square$

Cas particulier usuels :

Les trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$:

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{aligned} \|(x,y)\|_1 &= |x|+|y| \\ \|(x,y)\|_2 &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \|(x,y)\|_\infty &= \max(|x|,|y|) \end{aligned}}$$

---

c) Normes usuelles sur $C([a,b],\mathbb{K})$

Ici $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Notations

Pour $f \in C([a,b],\mathbb{K})$, on note :

$$\boxed{\begin{aligned} &\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \\ &\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \ ; \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \end{aligned}}$$

Prop

$\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur l'espace $C([a,b],\mathbb{K})$

Démo

1) Pour $\| \ \|_1$

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$

(A) Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$.

Supp que $\|f\|_1 = 0$ et M.que $f = 0$.

$$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(t)|\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [a,b],\ |f(t)| = 0$$

$$\Rightarrow f = 0 \ \square$$

Car $|f| \geq 0$ sur $[a,b]$
$|f|$ continue sur $[a,b]$
$\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$

(B) $$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|\,dt$$

$$= |\lambda| \int_a^b |f(t)|\,dt$$

$$= |\lambda| \cdot \|f\|_1 \ \square$$

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$

(C) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$?

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)\,dt$$ (car : $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$)

$$= \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt$$

$$= \|f\|_1 + \|g\|_1 \ \square$$

D'où $\| \ \|_1$ est une norme sur $C([a,b],\mathbb{K})$ $\square$

2) Pour $\| \ \|_\infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

(A) Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$.

Supp que $\|f\|_\infty = 0$ et M.q. $f = 0$.

On a : $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0$

D'autre part : $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b], |f(x)| = 0$

$\Rightarrow f = 0$ $\square$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

(B) $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\lambda f(t)|$

$= \sup_{t\in[a,b]} \left(|\lambda| \cdot |f(t)| \right)$

$= |\lambda| \cdot \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

$= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ $\square$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$

(C) Soient f et $g \in C([a,b],\mathbb{K})$.

M.q. : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|f+g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)|$

Or : $\forall t \in [a,b], |f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$

$\Rightarrow \forall t \in [a,b], |f(t)+g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

D'où $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

C à d : $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $\square$

3) Pour $\| \ \|_2$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

(A) Soit $f \in C([a,b], \mathbb{K})$.
Supp que $\|f\|_2 = 0$ et Mq que $f = 0$.

$$\|f\|_2 = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$$

$$\Rightarrow \left(\forall t \in [a,b], |f(t)|^2 = 0\right)$$

Car $\boxed{\begin{array}{l} |f|^2 \geq 0 \text{ sur } [a,b] \\ |f|^2 \text{ continue sur } [a,b] \\ \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \end{array}}$

D'où $f = 0$ □

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

(B) $$\|\lambda f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |\lambda|^2 |f(t)|^2 dt}$$

$$= \sqrt{|\lambda|^2 \int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$= \sqrt{|\lambda|^2} \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$= |\lambda| \cdot \|f\|_2 \quad \square$$

(C) $\|f+g\|_2 \overset{?}{\leq} \|f\|_2 + \|g\|_2$ ☆

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

On a :

☆ $\Leftrightarrow \|f+g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2$

$$\Leftrightarrow \int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt + 2\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$$

Or $\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \leq \int_a^b (|f(t)|+|g(t)|)^2 dt$ (l'inég triangulaire)

D'où $\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt + 2\int_a^b |f(t)|.|g(t)| dt$

Or $\int_a^b |f(t)|.|g(t)| dt \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

D'où ☆ voulue □

Rappel (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}}$$

Vocabulaire :

1) $\|\ \|_\infty$ s'appelle norme de la convergence uniforme.

2) $\|\ \|_1$ s'appelle norme de la convergence en moyenne.

3) $\|\ \|_2$ s'appelle norme de la convergence en moyenne quadratique.

---

3) Propriétés immédiates de la norme

Déf 1

Si $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur unitaire.

Prop 2

Si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire.

Démo

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \cdot \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \times \|x\| = 1$$

Prop

Soit $(E, \| \ \|)$ un evn.
Soient $x, y \in E$. On a :

1) $\|-x\| = \|x\|$

2) $\|x-y\| = \|y-x\|$

3) $\|x-y\| = 0 \iff x = y$

4) i) $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ii) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

Démo

1) $\|-x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$

2) vient de 1)

3) $\|x-y\| = 0 \iff x - y = 0$

$\iff x = y$

4) i) $\|x-y\| = \|x + (-y)\|$

$$\leq \|x\| + \|-y\|$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

ii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$?

Rappel : $|t| \leq r \iff -r \leq t \leq r$

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \iff -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Pour $\boxed{-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|}$ par exemple :

$$\boxed{-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\|} \iff \|y\| \leq \|x-y\| + \|x\|$$

Or $\|y\| = \|(y-x) + x\|$

$\leq \|y-x\| + \|x\|$ (l'inég triangulaire)

$= \|x-y\| + \|x\|$ $\square$

---

4) Boules et sphères dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soient $x, y \in E$.

La distance entre x et y est :

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Prop 2

Soient $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x,y) = d(y,x)$

2) $d(x,0) = \|x\|$

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Inégalité triangulaire)

4) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

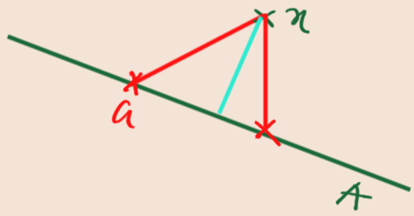
Démo

3) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \underbrace{\|x-y\|}_{d(x,y)} + \underbrace{\|y-z\|}_{d(y,z)}$

Déf 3

Soient $x \in E$ et $A \subset E$.

La distance de x à A est :



$$d(x,A) = \inf_{a \in A} (d(x,a))$$

RQ :

1) Si $x \in A$ alors $d(x,A) = 0$

2) La réciproque est en général fausse.

Contre-exemple

Considérons l'evn $(\mathbb{R}, |\,|)$.

$A =]1,2[$ et $x = 2$.

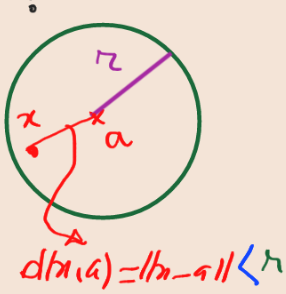
On a $d(2,A) = 0$ mais $2 \notin A$.

Déf 4

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

1) La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B(a,r) = \{x \in E \,/\, \|x-a\| < r\}$$



2) La boule fermée de Centre a et de rayon r est :

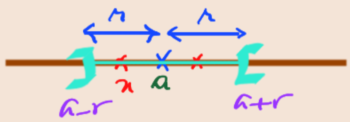
$$B_f(a,r) = \{x \in E \,/\, \|x-a\| \leq r\}$$

3) La Sphère de Centre a et de rayon r est :

$$S(a,r) = \{x \in E \,/\, \|x-a\| = r\}$$

Exemple 1

On est dans l'evn $(\mathbb{R}, |\ |)$:



Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

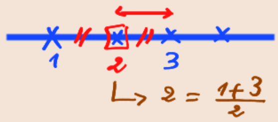
1) $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < r\} = \,]a-r, a+r[$

2) $B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$

3) $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\}$

Exemple 2

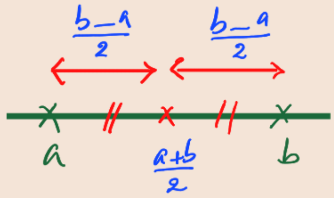
On est encore dans l'evn $(\mathbb{R}, |\ |)$:



Soient $a < b$ deux réels.

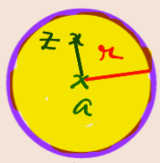
1) $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

2) $[a,b] = B_f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$



Exemple 3

On est dans l'evn $(\mathbb{C}, |\ |)$:



Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$

1) $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-a| < r\} = D(a,r)$; le disque ouvert de Centre a et de rayon r.

2) $B_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-a| \leq r\} = \overline{D}(a,r)$; le disque fermé de Centre a et de rayon r.

Vocabulaire

Dans un evn $(E, \| \|)$:

1) La boule unité fermée est $B_f(0,1) = \{x \in E / \|x\| \leqslant 1\}$

2) La boule unité ouverte est $B(0,1) = \{x \in E / \|x\| < 1\}$

Exercice classique

Dessiner la boule unité fermée de l'evn $\mathbb{R}^2$ relativement à chacune de ses normes usuelles : $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.

5) Parties convexes d'un evn

$(E, \| \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soient $a, b \in E$.

Le segment $[a,b]$ est la partie de E définie par :

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b \,/\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

NB

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b \,/\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

$$[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b \,/\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

$$[a,b] = \{a + \lambda(b-a) \,/\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

Déf 2

Soit A une partie non vide de E.

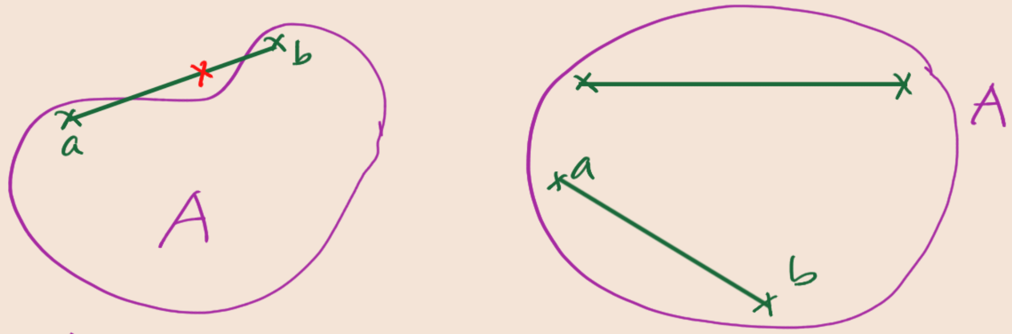
A est dite partie convexe de E si et ssi :

$$\forall a,b \in A, \quad [a,b] \subset A$$

Autrement dit

$$\forall a,b \in A, \forall t \in [0,1], \; ta + (1-t)b \in A$$

Schéma



A non convexe A Convexe

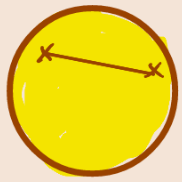
Prop 3

1) Les sev de E sont des parties convexes.
2) Les boules ouvertes et fermées sont convexes.

Démo

1) Soit F un sev de E.
Soient $a, b \in F$ et $t \in [0,1]$, $ta+(1-t)b \in F$ car F sev de E $\square$

2) i) Soit $B_f(a,r)$ une boule fermée.



Soient $x,y \in B_f(a,r)$. Soit $t \in (0,1)$.
Mq $\big(tx+(1-t)y\big) \in B_f(a,r)$

On a $\begin{pmatrix} \|x-a\| \leq r \\ \|y-a\| \leq r \end{pmatrix}$ et on veut m que $\|(tx+(1-t)y-a)\| \leq r$:

$$\begin{aligned}
\|(tx+(1-t)y)-a\| &= \|(tx+(1-t)y)-(ta+(1-t)a)\| \\
&= \|t(x-a)+(1-t)(y-a)\| \\
&\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\| \\
&= t\underbrace{\|x-a\|}_{\leq r} + (1-t)\underbrace{\|y-a\|}_{\leq r} \\
&\leq tr+(1-t)r \\
&= r
\end{aligned}$$

$\square$

6) Bornitude

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

a) Parties bornées

Déf 1

Une partie A de E est dite bornée si et ssi :

$$\boxed{\exists M \geq 0, \ \forall x \in A, \ \|x\| \leq M}$$

Prop 2

Les boules et les sphères sont des parties bornées de E.

Démo

Soit $B_f(a,r)$ une boule fermée de E.

Mq qu'elle est bornée :

Soit $x \in B_f(a,r)$.

Alors $\|x-a\| \leq r$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \underbrace{\|x-a\|}_{\leq r} + \|a\| \leq r + \|a\|.$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in B_f(a,r), \ \|x\| \leq r + \|a\|}$$

□

b) Suites bornées dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E.

$(U_n)_n$ est dite bornée si et ssi :

$$\boxed{\exists M \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|U_n\| \leq M}$$

Notation $B(\mathbb{N}, E)$: L'ensemble des suites bornées à valeurs dans E.

Prop 2

1) Toute combinaison linéaire de suites bornées dans un evn est une suite bornée.

2) $B(\mathbb{N}, E)$ est un espace vectoriel.

Démo :

1) Pareil à dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) $B(\mathbb{N}, E)$ est un sev de $E^{\mathbb{N}}$ d'après 1°).

C) Fonctions bornées dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf 1

Soit X un ensemble non vide.
Soit $f \in \mathcal{F}(X, E) = E^X$.
f est dite bornée si et ssi :

$$\boxed{\exists M \geq 0, \ \forall x \in X, \ \|f(x)\| \leq M}$$

Notation $B(X, E)$: L'ensemble des fonctions bornées sur X à valeurs dans E.

Prop 2

1) Toute combinaison linéaire de fonctions bornées à valeurs dans E est une fonction bornée.

2) $B(X, E)$ est un espace vectoriel.

Démo :

1) Soient $f : X \to E$ et $g : X \to E$ deux fonctions bornées.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Mq $(\lambda f + \mu g)$ est bornée :

$$\exists M_1, M_2 \geq 0 \text{ tq } : \begin{cases} \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M_1 \\ \forall x \in X, \|g(x)\| \leq M_2 \end{cases}$$

D'où : $\forall x \in X, \|\lambda f(x) + \mu . g(x)\| \leqslant |\lambda| \underbrace{\|f(x)\|}_{\leq M_2} + |\mu| . \underbrace{\|g(x)\|}_{\leq M_2}$

$\Rightarrow \left(\forall x \in X, \|\lambda f(x) + \mu . g(x)\| \leqslant |\lambda| M_2 + |\mu| . M_2 \right)$

D'où $(\lambda f + \mu . g)$ est bornée $\square$

e) $B(X, E)$ est un sev de $E^X = \mathcal{F}(X, E)$ d'après 1°). $\square$

Notation

Soit $f \in B(X, E)$. Notons :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

NB1 $\sup_{x \in X} \|f(x)\|$ désigne $\sup \left(\{ \|f(x)\| / x \in X \} \right)$

NB2 $\sup \left(\{ \|f(x)\| / x \in X \} \right)$ existe car $\{ \|f(x)\| / x \in X \}$ est une partie non vide (car $X \neq \emptyset$) majorée de $\mathbb{R}$ (car f bornée)

Prop 3

$(B(X, E), \| \ \|_\infty)$ est un evn.

Autrement dit

$\| \ \|_\infty$ est une norme sur $B(X, E)$.

Démo

Ressemble à celle de $\| \ \|_\infty$ sur $C([a, b], \mathbb{K})$ vue.

Vocabulaire

$\| \ \|_\infty$ s'appelle norme infinie ou norme de la convergence uniforme

Corollaire 4 $(B(\mathbb{N}, E), \| \ \|_\infty)$ est un evn où :

$$\|(u_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|$$

Démo

C'est $B(X,E)$ de la prop3, avec $X=\mathbb{N}$

Réflexes à avoir

1) Soit $f \in B(X,E)$. On a :

$$\forall x \in X, \ \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty$$

2) Soit $U=(U_n) \in B(\mathbb{N},E)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|U_n\| \leq \|U\|_\infty$$

7) Norme produit

Soient $(E_1, \| \ \|_1), \dots, (E_s, \| \ \|_s)$ des evn.

Notons $E = E_1 \times \dots \times E_s$.

On rappelle que E est un $\mathbb{K}$-esp vect pour les lois :

$$\boxed{\begin{array}{l} (x_1, \dots, x_s) + (y_1, \dots, y_s) = (x_1+y_1, \dots, x_s+y_s) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_s) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_s) \end{array}}$$

Notation

Pour $x = (x_1, \dots, x_s) \in E$, on note :

$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_s\|_s) = \max_{1 \leq i \leq s}(\|x_i\|_i)$$

Réflexe à avoir $\boxed{\forall 1 \leq i \leq s, \ \|x_i\|_i \leq \|x\|}$

Prop :

$(E, \| \ \|)$ est un evn.

Démo

Pareille à $\| \ \|_\infty$ dans $\mathbb{K}^s$.

Vocabulaire

La norme $\| \ \|$ qu'on vient de définir sur l'esp $E_1 \times \dots \times E_s$ s'appelle **la norme produit**.

II) Suites dans un evn

$(E, \|\ \|)$ sera un evn.

1) Convergence d'une suite dans un evn

Déf 1

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E.
Soit $l \in E$.
On dit que la suite $(U_n)_n$ possède l comme limite si et ssi la suite réelle $(\|U_n - l\|)_n$ converge vers 0.

Prop 2 (unicité de la limite)

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.
Si $(U_n)_n$ possède l comme limite alors celle-ci est unique.

Démo

Supp que (U_n) possède l et l' comme limites, et m.q. $l = l'$.

On a : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \|l - l'\| \leq \|U_n - l\| + \|U_n - l'\|\right)$ (inég-triang)

Par passage à la limite $(n \to +\infty)$, et vu que $\lim\limits_{n} \|U_n - l\| = 0$ et $\lim\limits_{n} \|U_n - l'\| = 0$, On a $\|l - l'\| = 0$

$$\Longrightarrow l = l' \quad \square$$

Notation et vocabulaire

1) l s'appelle la limite de $(U_n)_n$.
2) On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

Prop 3

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

2) $\lim_{n\to+\infty} \|U_n - \ell\| = 0$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|U_n - \ell\| \leq \varepsilon$

Justification

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) (c'est la définition vue)

(2) $\Longleftrightarrow \lim_n \|U_n - \ell\| = 0$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|U_n - \ell\| \leq \varepsilon$ (on est dans $\mathbb{R}$)

Déf 4

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E.

1) La suite (U_n) est dite **convergente** si et ssi il existe $\ell \in E$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$$

2) Si $(U_n)_n$ n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Prop 5

Toute suite vectorielle convergente est bornée.

Démo

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $\ell \in E$.

Supp que $\lim_n U_n = \ell$ et Mq que (U_n) est bornée.

La suite réelle $(\|U_n - \ell\|)_n$ est convergente (vers 0)

D'où elle est bornée (vu en Sup).

$\Rightarrow (\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|U_n - \ell\| \leq M)$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}, \|U_n\| \leq \|U_n - \ell\| + \|\ell\| \leq M + \|\ell\|)$

$\Longrightarrow (U_n)_n$ est bornée. $\square$

NB : La réciproque est en générale fausse. ($((-1)^n)_n$ dans $\mathbb{R}$).

Prop 6

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (U_n) = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|U_n\| = \|l\|}$$

Démo

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.

Supp que $\lim_n U_n = l$ et Mq que $\lim_n \|U_n\| = \|l\|$.

On a $\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}, \ \big| \|U_n\| - \|l\| \big| \leqslant \|U_n - l\| \\ \lim_{n\to+\infty} \|U_n - l\| = 0 \end{pmatrix}$

« On est avec des suites réelles »

D'où $\lim_n \|U_n\| = \|l\|$ $\square$

2) Opérations sur les suites convergentes

Sauf mention contraire, toutes les suites qu'on envisagera ici seront à valeurs dans l'evn E.

Prop 1 (Combinaison linéaire)

Toute combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente.

On a précisément :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (\alpha U_n + \beta V_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} U_n + \beta \lim_{n\to+\infty} V_n}$$

Démo (en bref)

Supp que $\lim_n U_n = l$ et $\lim_n V_n = L$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Mq $\lim_n (\alpha U_n + \beta V_n) = \alpha l + \beta L$.

càd $\lim_n \|(\alpha U_n + \beta V_n) - (\alpha l + \beta L)\| = 0$

Ce qui est vrai car :

$$\forall n, \ 0 \leqslant \|(\alpha U_n + \beta V_n) - (\alpha l + \beta L)\| \leqslant \underbrace{|\alpha| . \underbrace{\|U_n - l\|}_{\to 0} + |\beta| . \underbrace{\|V_n - L\|}_{\to 0}}_{\to 0}$$ $\square$

Prop 2

Soient $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.
La suite produit $(\alpha_n U_n)_n$ sera aussi convergente, et on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n . U_n) = \left(\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\right).\left(\lim_{n\to+\infty}U_n\right)}$$

Démo

Notons $\begin{pmatrix} \lim_n U_n = \ell \in E \\ \lim_n \alpha_n = \alpha \in \mathbb{K} \end{pmatrix}$. Mq que $\lim_n \alpha_n U_n = \alpha \ell$

On a $\|U_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $|\alpha_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\alpha_n U_n - \alpha \ell\| &= \|\alpha_n U_n - \alpha_n \ell + \alpha_n \ell - \alpha \ell\| \\ &\leqslant \|\alpha_n (U_n - \ell)\| + \|(\alpha_n - \alpha)\ell\| \\ &\leqslant \underbrace{|\alpha_n|}_{\to|\alpha|} . \underbrace{\|U_n - \ell\|}_{\to 0} + \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} . \|\ell\| \end{aligned}$$

d'où $\|\alpha_n U_n - \alpha \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\square$

3) Suites à valeurs dans un produit cartésien d'evn

Dans ce paragraphe, on a :

$(E_1, \| \ \|_1), \dots, (E_s, \| \ \|_s)$ des evn.

$E = E_1 \times \dots \times E_s$, muni de la norme produit :

$$\|(x_1, \dots, x_s)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} (\|x_i\|_i)$$

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^s) \in E_1 \times \dots \times E_s = E$$

Vocabulaire

Les suites $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, où $1\leq i\leq s$, sont dites les suites composantes de la suite $(x_n)_n$.

Prop 1 (Bornitude)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\iff \left(\forall 1\leq i\leq s,\ (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right)$

Autrement dit

(x_n) bornée si et si toutes ses suites composantes sont bornées.

Démo

$(\Longrightarrow)$

Supp (x_n) bornée.

Soit $1\leq i\leq s$. M.q. $(x_n^i)_n$ est aussi bornée.

(x_n) bornée $\Longrightarrow (\exists M\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \|x_n\|\leq M)$

et on a : $\|x_n^i\|_i \leq \|x_n\| \leq M$ $\square$

$(\Longleftarrow)$

Supp que : $(\forall 1\leq i\leq s,\ (x_n^i)_n$ bornée $)$.

M.q. $(x_n)_n$ bornée.

On a : $(\forall i,\ \exists M_i\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \|x_n^i\|_i\leq M_i)$

Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|x_n\| = \max_{1\leq i\leq s}(\|x_n^i\|_i) \leq \max_{1\leq i\leq s}(M_i)$$

D'où (x_n) est bornée. $\square$

Prop 2 (Convergence)

1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff \left(\forall\, 1\leq i\leq s,\ (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right)$

2) Le cas échéant, on a :

$$\boxed{\lim_n x_n = \left(\lim_n x_n^1, \dots, \lim_n x_n^s\right)}$$

Autrement dit :

(x_n) converge si et ssi toutes ses suites composantes convergent.

Démo

($\Longrightarrow$)

Supp $\lim_n x_n = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in E$.

Soit $k \in [\![1, s]\!]$. M.q. $\lim_n x_n^k = \ell_k$

On a $\|x_n - \ell\| = \max\limits_{1\leq i\leq s} \left(\|x_n^i - \ell_i\|_i\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Et $\|x_n^k - \ell_k\|_k \leq \underbrace{\|x_n - \ell\|}_{\to 0} \Longrightarrow \|x_n^k - \ell_k\|_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

càd $\lim_n x_n^k = \ell_k$ $\square$

($\Longleftarrow$)

Supp que : $\left(\forall\, 1\leq i\leq s,\ \lim_n x_n^i = \ell_i\right)$

Et M.q. $\lim_n x_n = (\ell_1, \dots, \ell_s)$ (noté ℓ).

On a : $\left(\forall\, 1\leq i\leq s,\ \|x_n^i - \ell_i\|_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\|x_n - \ell\| = \max_{1\leq i\leq s}\left(\|x_n^i - \ell_i\|_i\right) \leq \underbrace{\overbrace{\sum_{i=1}^{s} \|x_n^i - \ell_i\|_i}^{\to 0}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

D'où $\|x_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

càd : $\lim_n x_n = \ell$ $\square$

Exemple :

Considérons la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans l'evn $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n\geq 1,\quad X_n=\left(\frac{\sin n}{n},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ Converge et préciser sa limite.

Solution

On a :

$$\forall n\geq 1,\quad X_n=\left(\frac{\sin n}{n},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

D'où les suites composantes de $(X_n)_{n\geq 1}$ sont les suites réelles $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$.

Alors pour montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ Converge, il suffit de montrer que les suites $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$ convergent.

On a :

$$\lim_n \frac{\sin n}{n}=\lim_n\left(\sin n\times\frac{1}{n}\right)$$

$$=0 \text{ car } \begin{cases}\lim_n \frac{1}{n}=0\\ (\sin n)_n \text{ bornée}\end{cases}$$

(Attention à écrire : « $\lim_n \frac{\sin n}{n}=1$ » $n\not\to 0$)

et on a :

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_n e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$= e^{1} \quad , \text{car} \left\{ \begin{array}{l} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} \sim 1 \\ \text{d'où } \lim\limits_{n} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \end{array} \right.$$

$$= e$$

Ainsi, les suites $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$ convergent.

D'où $(X_n)_{n \geq 1}$ converge.

Et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} X_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sin n}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)$$

$$= \left(\lim_{n} \frac{\sin n}{n}, \lim_{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)$$

$$= (0, e) \in \mathbb{R}^2 \quad \square$$

4) Normes équivalentes

Déf 1

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.

N_1 et N_2 sont dites équivalentes si et ssi :

$$\boxed{\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2}$$

Prop 2

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) N_1 et N_2 sont dites équivalentes
2) $\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$
3) $\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$

Démo

Claire (faite au brouillon en classe

NB

Notons $N_1 \sim N_2$ pour dire que N_1 et N_2 sont équivalentes.

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Exercice

Montrer que les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Noter qu'il suffit de vérifier que l'on a :

$$\| \ \|_1 \leq c \| \ \|_2 \ , \quad \| \ \|_2 \leq d \| \ \|_\infty \quad \text{et} \quad \| \ \|_\infty \leq e \| \ \|_1$$

Prop 3 (Bornitude)

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

1) Soit $A \subset E$.

$(A \text{ bornée pour } N_1) \Longleftrightarrow (A \text{ bornée pour } N_2)$

2) Soit $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

$((U_n)_n \text{ bornée pour } N_1) \Leftrightarrow ((U_n)_n \text{ bornée pour } N_2)$

3) Soit $f \in E^X$ (où X ensemble non vide).

$(f \text{ bornée pour } N_1) \Leftrightarrow (f \text{ bornée pour } N_2)$

Démo

Montrons 1). (2) et 3) sont similaires)

On a : $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$

$(A \text{ borné pour } N_1) \Leftrightarrow (A \text{ borné pour } N_2)$?

$(\Longrightarrow)$

$(A \text{ borné pour } N_1) \Rightarrow (\exists M \geq 0, \forall x \in A, N_1(x) \leq M)$

$\Rightarrow \left(\forall x \in A, N_2(x) \leq \frac{M}{\alpha}\right)$ Car $\alpha N_2 \leq N_1$

$(\Longleftarrow)$ idem $\square$

Prop 4 (Convergence d'une suite)

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

Soient $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$. On a :

$$\boxed{((U_n)_n \text{ converge vers } l \text{ pour } N_1) \Longleftrightarrow ((U_n)_n \text{ converge vers } l \text{ pour } N_2)}$$

Démo

On a : $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \alpha N_2(u_n-\ell) \leq N_1(u_n-\ell) \leq \beta N_2(u_n-\ell)$

Il est facile à voir que :

$$N_1(u_n-\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff N_2(u_n-\ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où le résultat voulu. $\square$

5) Cas de la dimension finie

Prop 1 (admise)

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Remarque importante

Quand on est dans un espace de dimension finie, on peut parler de la bornitude ou de la convergence d'une suite sans spécifier la norme de travail.

Ici

$\dim(E) = d \geq 1$

$B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ une base de E.

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$; une suite à valeurs dans E.

Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\underbrace{x_n}_{\in E} = \underbrace{x_n^1}_{\in\mathbb{K}}\cdot\varepsilon_1 + \dots + \underbrace{x_n^d}_{\in\mathbb{K}}\cdot\varepsilon_d = \sum_{i=1}^{d} x_n^i\,\varepsilon_i$$

Vocabulaire Les suites $(x_n^i)_n$ s'appellent les suites composantes de la suite $(x_n)_n$ dans la base B.

Prop 2 (Bornitude)

$(x_n)_n$ est **bornée** si et ssi toutes ses suites composantes le sont.

Démo

E étant de dimension **finie**, on peut prendre alors **n'importe quelle** norme.

Considérons la norme :

$$\text{Pour } y = \sum_{i=1}^{d} y_i \varepsilon_i \in E, \ \|y\| = \max_{1 \le i \le d} (|y_i|).$$

Ainsi, la démonstration est calquée sur celle du paragraphe 3°).

Prop 3 (Convergence)

1) $(x_n)_n$ est **converge** si et ssi toutes ses suites composantes convergent.

2) Le cas échéant, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \sum_{i=1}^{d} \left(\lim_{n \to +\infty} x_n^i \right) \cdot \varepsilon_i$$

Démo

La démonstration est encore calquée sur celle du paragraphe 3°).

Exemple 1

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a :

1) (x_n) bornée $\iff \big((Re(x_n))_n$ et $(Im(x_n))_n$ sont bornées$\big)$

2) i) (x_n) converge $\iff \big((Re(x_n))_n$ et $(Im(x_n))_n$ convergent$\big)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\lim_n x_n = \lim_n (Re(x_n)) + i \lim_n (Im(x_n))$$

Justification

C'est (prop 1), avec $\left|\begin{array}{l} E=\mathbb{C} \\ B=(1,i) \\ (Re(x_n))_n \text{ et } (Im(x_n))_n \text{ les suites composantes} \end{array}\right.$

Exemple 2

Soit $(A_n)_n$ une suite matricielle à valeurs dans $M_2(\mathbb{K})$.

Notons $A_n=\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$. On a :

1) $(A_n)_n$ bornée $\Longleftrightarrow \left((a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \text{ et } (d_n)_n \text{ sont bornées}\right)$

2) i) $(A_n)_n$ CV $\Longleftrightarrow \left((a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \text{ et } (d_n)_n \text{ CV}\right)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\lim_n \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_n a_n & \lim_n c_n \\ \lim_n b_n & \lim_n d_n \end{pmatrix}$$

Justification

C'est (prop 1), avec $\left|\begin{array}{l} E=M_2(\mathbb{K}) \\ B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}) \text{ la base can de } M_2(\mathbb{K}). \\ (a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \text{ et } (d_n)_n \text{ les composantes dans } B. \end{array}\right.$

Exemple 3 (cas général)

Soit $(A_n)_n$ une suite matricielle à valeurs dans $M_p(\mathbb{K})$.

Notons pour chaque $n\in\mathbb{N}$: $A_n = \left(A_n^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq p}$.

1) $(A_n)_n$ bornée $\Longleftrightarrow \left(\forall i,j\in[\![1,p]\!],\ \left(A_n^{ij}\right)_n \text{ est bornée}\right)$

2) i) $(A_n)_n$ converge $\Longleftrightarrow \left(\forall i,j\in[\![1,p]\!],\ \left(A_n^{ij}\right)_n \text{ converge}\right)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\lim_n A_n = \left(\lim_{n\to+\infty} A_n^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq p}}$$

Autrement dit : $\boxed{\forall 1 \leq i,j \leq p, \left(\lim_n A_n\right)_{ij} = \lim_n A_n^{ij}}$ S!

⚠ À retenir

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = A \iff \left(\forall i,j, \lim_{n\to+\infty} (A_n)_{ij} = A_{ij}\right)}$$

Justification

C'est (prop 1), avec
- $E = M_p(\mathbb{K})$
- $B = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ la base can de $M_p(\mathbb{K})$.
- Les $(A_n^{ij})_n$ sont les composantes de $(A_n)_n$ dans B.

Exercice d'application

Soient $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ deux suites à valeurs dans l'evn $M_p(\mathbb{K})$.

Soient A et $B \in M_p(\mathbb{K})$.

1) Montrer que :

i) $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \implies \lim_{n\to+\infty} tr(A_n) = tr(A)$

ii) $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \implies \lim_{n\to+\infty} det(A_n) = det(A)$

2) i) M que :

$$\begin{pmatrix} \lim_{n\to+\infty} A_n = A \\ \lim_{n\to+\infty} B_n = B \end{pmatrix} \implies \lim_{n\to+\infty} (A_n B_n) = AB$$

ii) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \implies \left(\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} (A_n^k) = A^k\right)$$

Solution

1) Montrer que :

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} tr(A_n) = tr(A)$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \forall i,j,\ \lim_{n\to+\infty} (A_n)_{ij} = A_{ij}$$

$$\lim_{n\to+\infty} tr(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (A_n)_{ii} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{(A_n)_{ii}}_{\to A_{ii}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

$$= tr(A)$$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} det(A_n) = det(A)$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \forall i,j,\ \lim_{n\to+\infty} (A_n)_{ij} = A_{ij}$$

Rappel

$$\boxed{\text{Si } A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq p},\ \text{on a } det(A) = \sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} A_{i\sigma(i)}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} det(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} \underbrace{(A_n)_{i\sigma(i)}}_{\to A_{i\sigma(i)}} \right)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} A_{i\sigma(i)}$$

$$= det(A)$$

2) i)

Supp que $\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \\ \lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B \end{pmatrix}$, et M que $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n B_n) = AB$

On a : $\forall 1 \leq i,j \leq p$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n)_{ij} = A_{ij}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (B_n)_{ij} = B_{ij}$

Soit $1 \leq i,j \leq p$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n B_n)_{ij} = (AB)_{ij}$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} (A_n B_n)_{ij} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} \underbrace{(A_n)_{ik}}_{\to A_{ik}} \cdot \underbrace{(B_n)_{kj}}_{\to B_{kj}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

$$= (AB)_{ij} \quad \square$$

ii) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A \Longrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} (A_n{}^k) = A^k\right)$$

C'est par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, et via 2) i).

6) Suites extraites — Valeurs d'adhérences

$(E, \| \|)$ evn.

Déf 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ application strictement croissante.

Déf 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in E$.

a est dit valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et ssi a est la limite de l'une de ses suites extraites.

Par exemple

Considérons la suite réelle $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1 et (-1) en sont des valeurs d'adhérence.

Prop 3

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(x_n)_n$ converge alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite $\lim_n x_n$.

2) Autrement dit, $(\lim_n x_n)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

Démo

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Supp que $\lim_n x_n = l \in E$.

Soit $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite de (x_n). Mque $\lim_n x_{\varphi(n)} = l$

On a $(\|x_n - l\|)_n$ est une suite réelle convergente vers 0.

D'où sa sous-suite $(\|x_{\varphi(n)} - l\|)_n$ converge aussi vers 0 (vu au SUP).

$\Rightarrow \lim_n x_{\varphi(n)} = l$

Corollaire 4

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(x_n)_n$ possède deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors elle diverge.

2) Autrement dit :

Si $(x_n)_n$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes alors elle diverge.

Par exemple

Considérons la suite réelle $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle diverge car :

1 et (-1) en sont deux valeurs d'adhérence.

III) Topologie dans un evn

$(E, \|\ \|)$ sera un evn.

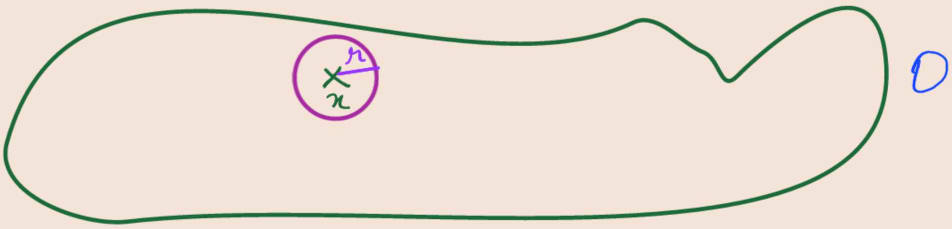
1) Parties ouvertes d'un evn

Déf 1

Soit $O \subset E$.

O est dit ouvert de E si et ssi :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ O = \emptyset \\ \quad \text{ou} \\ 2)\ \forall x\in O,\ \exists r>0,\ B(x,r) \subset O \end{array}}$$



NB1 $\emptyset$ est par définition un ouvert de E.

NB2 On dit aussi partie ouverte de E.

Prop 2

1) E est un ouvert de E.

2) Les boules ouvertes sont des ouverts de E.

Démo

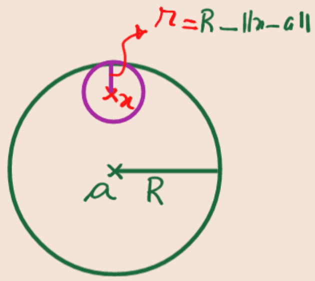
$\forall x \in E,\ \exists r>0,\ B(x,r) \subset E$

1) E est un ouvert de E ?

Soit $x \in E$. $B(x,1) \subset E$ (n'importe quel $r>0$ conviendra)

Donc E est un ouvert. $\square$

2) Les boules ouvertes sont des ouverts de E ?



Soit $B(a,R)$ une boule ouverte de E.

Soit $x \in B(a,R)$ (on a $\|x-a\|<R$)

Posons $r = R - \|x-a\| > 0$.

On a $B(x,r) \subset B(a,R)$; en effet :

Soit $y \in B(x,r)$. Montrons que $y \in B(a,R)$

On a $\|x-y\|<r$ et on veut montrer que $\|y-a\|<R$

On a $\|y-a\| \leq \underbrace{\|x-y\|}_{<r} + \|x-a\|$

$< r + \|x-a\|$ $\qquad r = R - \|x-a\|$

$= R$

$\square$

Prop 3

Les singletons, les boules fermées et les sphères ne sont pas des ouverts de E.

Prop 4

Dans l'evn $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts.

Démo

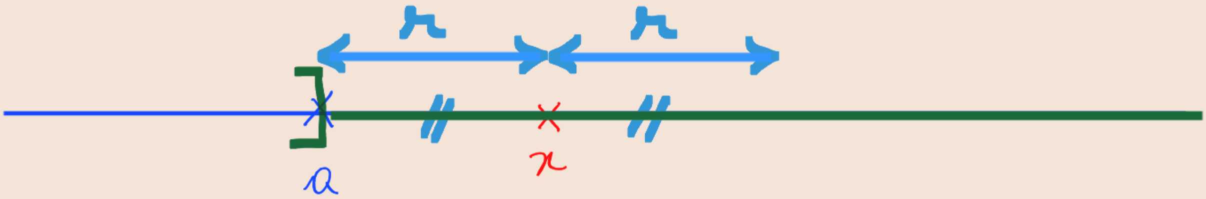
1) Soient $a<b$ deux réels. M.q $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

On a $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, donc ouvert comme boule ouverte.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. M.q $]a,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in]a,+\infty[$. Montrons qu'il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset]a,+\infty[$

C.à.d : $(\exists r>0 ,]x-r,x+r[\subset]a,+\infty[)$



$r = x-a > 0$ Convient.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. M.q $]a,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Pareil à 2).

Prop 5

1) Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

2) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Démo

1) Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E ?

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E.

M que $\Omega = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de E.

Soit alors $x \in \Omega$. M que : $(\exists r>0,\ B(x,r) \subset \Omega)$

On a $x \in \Omega = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \Longrightarrow (\exists i_0 \in I,\ x \in \mathcal{O}_{i_0})$

Or ($\mathcal{O}_{i_0}$ ouvert et $x \in \mathcal{O}_{i_0}$), alors $(\exists r_0>0,\ B(x,r_0) \subset \mathcal{O}_{i_0})$

$\Longrightarrow \left(\exists r_0>0,\ B(x,r_0) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i = \Omega\right)$ $\square$ (car $\mathcal{O}_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$)

---

2) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E ?

Soit $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ouverts de E.

M que $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de E.

Soit alors $x \in \Omega$. M qu'il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.

On a $x \in \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i \Longrightarrow (\forall 1\leq i\leq n,\ x \in \mathcal{O}_i)$

$\Longrightarrow (\forall 1\leq i\leq n,\ \exists r_i>0,\ B(x,r_i) \subset \mathcal{O}_i)$

$\Longrightarrow \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} B(x,r_i)\right)}_{\shortparallel} \subset \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i\right)}_{\shortparallel}$

$\Longrightarrow B(x,r) \subset \Omega$; où $r = \min_{i=1}^{n}(r_i) > 0$ $\square$

Attention !

C'est en général faux pour une intersection quelconque.

Contre-exemple :

Dans l'evn $(\mathbb{R}, | \ |)$, on note $O_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{0\}$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, bien que tous les O_n sont des ouverts.

2) Parties fermées d'un evn

Déf 1 Soit $F \subset E$.

F est dite partie fermée de E si et ssi son complémentaire F^C est un ouvert de E.

NB On dit aussi fermé de E.

Réflexe ⚠

$$\boxed{\begin{array}{l} A^C \text{ ouvert} \iff A \text{ fermé} \\ B^C \text{ fermé} \iff B \text{ ouvert} \end{array}}$$

Prop 2

1) $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
2) Les singletons sont des fermés de E.
3) Les boules fermées et les sphères sont des fermés de E.

Démo

1) $\emptyset$ et E sont des fermés de E ?

$(\emptyset^C = E$ et E ouvert$) \Rightarrow \emptyset$ fermé

$(E^C = \emptyset$ et $\emptyset$ ouvert$) \Rightarrow E$ fermé $\square$

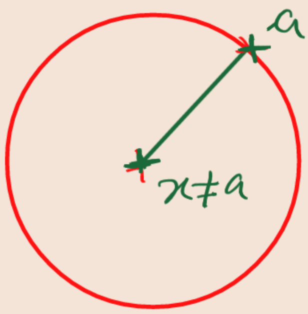
2) Les singletons sont des fermés de E ?

Soit $a \in E$. M.q. $\{a\}^c$ est un ouvert de E.

Soit $x \in \{a\}^c$, c.à.d $x \neq a$.

M.q : $(\exists r > 0,\ B(x,r) \subset \{a\}^c)$

C.à.d : $(\exists r > 0,\ B(x,r) \cap \{a\} = \phi)$



$r = \|x - a\| > 0$ convient $\square$

$\boxed{A \subset B^c \Leftrightarrow A \cap B = \phi}$ → Rappel

3) En exo chez-vous

Prop 3

Dans l'evn $\mathbb{R}$, tous les intervalles fermés sont des fermés.

Démo

i) $[a,b] = B_f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ fermé de $\mathbb{R}$.

ii) $[a,+\infty[^c =]-\infty, a[$ ouvert $\Rightarrow [a,+\infty[$ fermé de $\mathbb{R}$.

iii) $]-\infty,a]^c =]a,+\infty[$ ouvert $\Rightarrow]-\infty,a]$ fermé de $\mathbb{R}$.

Prop 4

1) Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.

2) Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E.

Démo

1) Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés.

Mq que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.

On a :

$\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé $\Leftrightarrow \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^C$ est un ouvert

$\Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} F_i^C$ ouvert

Ce qui est vrai comme réunion d'ouverts. $\square$

2) Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E.

(En bref)

$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$ fermé $\Leftrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^C$ ouvert

$\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_i^C$ ouvert

Ce qui est vrai, comme intersection finie d'ouverts $\square$

Attention

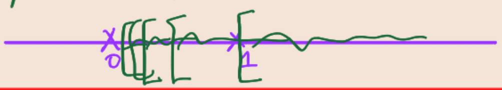
Une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé :

Contre_exemple

On est dans l'evn $(\mathbb{R}, |\,|)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\frac{1}{n}, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$

Mais $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, +\infty[\; = \;]0, +\infty[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$. $\square$



Prop 5

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

Soit $A \subset E$. On a :

1) (A ouvert pour N_1) $\Leftrightarrow$ (A ouvert pour N_2)

2) (A fermé pour N_1) $\Leftrightarrow$ (A fermé pour N_2)

Démo

1) (A ouvert pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (A ouvert pour N_2) ?

($\Longrightarrow$)

Supp $\beta N_2 \leq N_1 \leq \alpha N_2$.

Supp que (A ouvert pour N_1) et Mq que (A ouvert pour N_2) :

Soit $x \in A$. Mq qu'il existe $r > 0$ tq que $B_{N_2}(x,r) \subset A$

où $\boxed{\begin{array}{l} B_{N_2}(x,r) = \{t \in E \,/\, N_2(x-t) < r\} \\ \hline B_{N_1}(x,r) = \{t \in E \,/\, N_1(x-t) < r\} \end{array}}$

On a $\begin{pmatrix} x \in A \\ A \text{ ouvert pour } N_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\exists R > 0,\ B_{N_1}(x,R) \subset A\right)$

D'autre part :

$\left(\forall t \in E,\ \beta N_2(x-t) \leq N_1(x-t) \leq \alpha N_2(x-t)\right)$

D'où $B_{N_2}\left(x, \frac{R}{\alpha}\right) \subset B_{N_1}(x,R)$

Par suite $B_{N_2}\left(x, \frac{R}{\alpha}\right) \subset A$ $\left(r = \frac{R}{\alpha} \text{ cherché}\right)$ $\square$

($\Longleftarrow$) Idem.

2) (A fermé pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (A fermé pour N_2) ?

$\boxed{(A \text{ fermé pour } N_1)} \Longleftrightarrow A^c$ ouvert pour N_1

$\Longleftrightarrow A^c$ ouvert pour N_2 (d'après 1°)

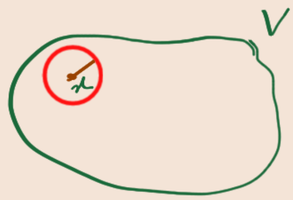
$\Longleftrightarrow \boxed{A \text{ fermé pour } N_2}$ $\square$

3) Voisinage d'un point

Déf 1 Soient $x \in E$ et $V \subset E$.

V est dit voisinage de x si et ssi :

$$(\exists r > 0,\ B(x,r) \subset V)$$



Prop 2

Un ouvert non vide est voisinage de chacun de ses points.

Démo Claire $\forall x \in \mathcal{O},\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset \mathcal{O}$

Exemples express (On est dans l'evn $(\mathbb{R}, |\ |)$.)

1) Les parties suivantes sont toutes des voisinages de 0 :
$]-1, 1[$, $[-\frac{1}{2}, +\infty[$, $[-2, 1]$.

2) $[0, +\infty[$ n'est pas un voisinage de 0.

4) Intérieur — Adhérence

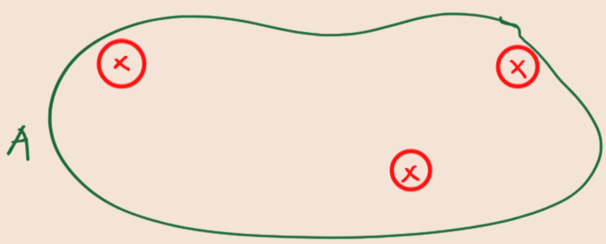
Déf 1 (Point intérieur à une partie)

Soit $A \subset E$. Soit $x \in A$.

x est dit un point intérieur de A si et ssi :

$$\boxed{\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A}$$

Schéma



Vocabulaire L'ensemble des points intérieurs de A s'appelle l'intérieur de A, et se note $\mathring{A}$

$$x \in \mathring{A} \iff (\exists r>0,\ B(x,r) \subset A)$$ réflexe

Exemples express

On est encore dans l'evn $(\mathbb{R}, |\ |)$.

A	$[1,2[$	$]1,2[$	$]-\infty,0]$	$\{a\}$	$\mathbb{R}$
$\mathring{A}$	$]1,2[$	$]1,2[$	$]-\infty,0[$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$

Prop 2

Soit $A \subset E$.

1) $\mathring{E} = E$

2) $\mathring{A} \subset A$

3) $\mathring{A} = \bigsqcup\limits_{\substack{\theta \text{ ouvert} \\ \theta \subset A}} \theta$; la réunion des ouverts contenus dans A.

4) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

5) $\mathring{A} = A \iff A$ ouvert

Démo

1) et 2) OK

3) $\mathring{A} = \bigsqcup\limits_{\substack{\theta \text{ ouvert} \\ \theta \subset A}} \theta$?

Par double inclusion.

"$\subset$"

Soit $x \in \mathring{A}$. Mq que $x \in \bigsqcup\limits_{\substack{\theta \text{ ouvert} \\ \theta \subset A}} \theta$.

Càd Mq qu'il existe un ouvert θ tel que $\begin{cases} \theta \subset A \\ x \in \theta \end{cases}$.

On a $x \in \mathring{A} \Rightarrow (\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A)$

Ainsi $\mathcal{O} = B(x,r)$ convient, car $\left|\begin{array}{l} B(x,r) \text{ ouvert} \\ B(x,r) \subset A \\ x \in B(x,r) \end{array}\right.$ $\square$

"$\supset$"

Soit $x \in \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O}$, M.q. $x \in \mathring{A}$

$x \in \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O} \Rightarrow$ (il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O} \subset A$ et $x \in \mathcal{O}$).

Et on veut montrer que : $(\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A)$

On a $\begin{pmatrix} x \in \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \text{ ouvert} \end{pmatrix} \Rightarrow (\exists r > 0,\ B(x,r) \subset \mathcal{O})$

Or $\mathcal{O} \subset A$, alors $(\exists r > 0,\ B(x,r) \subset A)$ CQFD $\square$

4) $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A ?

Il s'agit de montrer que :

i) $\mathring{A}$ est un ouvert contenu dans A

ii) Si Ω est un ouvert contenu dans A Alors $\Omega \subset \mathring{A}$

$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O}$

Pour i) $\left|\begin{array}{l} \mathring{A} \text{ est un ouvert comme réunion d'ouverts d'après 3°} \\ \mathring{A} \subset A \text{ (c'est 2°)} \end{array}\right.$

Pour ii)

Supposons que : Ω est un ouvert contenu dans A

Et M.q. : $\Omega \subset \mathring{A}$

$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert} \\ \mathcal{O} \subset A}} \mathcal{O}$

Il est Clair que $\Omega \subset \overbrace{\bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O}^{=\mathring{A}}$, car $\begin{cases} \Omega \text{ ouvert} \\ \Omega \subset A \end{cases}$

D'où $\Omega \subset \mathring{A}$ $\square$

---

5) $\mathring{A} = A \iff A$ ouvert ?

Par double implication.

$(\Longrightarrow)$

Claire, car $\mathring{A}$ ouvert.

$(\Longleftarrow)$

Supp que A est un ouvert, et mq que $\mathring{A} = A$.

On a déjà que $\mathring{A} \subset A$.

Par $A \subset \mathring{A}$:

On a $\left| \begin{array}{l} \mathring{A} \text{ le plus grand ouvert contenu dans } A \\ A \text{ est un ouvert contenu dans } A \end{array} \right.$

D'où $A \subset \mathring{A}$ $\square$

Déf 3 (Point adhérent à une partie)

Soit $A \subset E$. Soit $x \in E$.

x est dit un point adhérent à A si et ssi :

$$\boxed{\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$$

Vocabulaire L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A, et se note $\bar{A}$.

$$x \in \bar{A} \iff (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$$

réflexe

Exemples express

On est encore dans l'evn $(\mathbb{R}, |\,|)$.

A	$[1,2[$	$]1,2[$	$]-\infty,0[$	$]4,+\infty[$	$\mathbb{R}$
$\bar{A}$	$[1,2]$	$[1,2]$	$]-\infty,0]$	$[4,+\infty[$	$\mathbb{R}$

Prop 4

Soit $A \subset E$.

1) $\bar{E} = E$
2) $A \subset \bar{A}$
3) $^c(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{(^cA)}}$
4) $\bar{A}$ est un fermé.
5) $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F$; l'intersection de tous les fermés contenant A.
6) $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
7) $\bar{A} = A \iff A$ est un fermé.

Démo

1) et 2) OK

3) $^c(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{(^cA)}}$?

Faisons par équivalence :

$x \in \bar{A} \iff (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$

$x \in {}^c(\bar{A}) \iff x \notin \bar{A}$

$\iff (\exists r > 0,\ B(x,r) \cap A = \emptyset)$

$A \cap B = \emptyset \iff A \subset B^c$

$\iff (\exists r > 0,\ B(x,r) \subset (A^c))$

Pr. ELAMIRI www.iamateacher.org

$\Longleftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{(A^c)}}$ $\square$

$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow (\exists r>0, B(x,r) \subset A)$

4) $\bar{A}$ est un fermé ?

Car son complémentaire est un ouvert. $\square$

5) $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F$?

Faisons par exemple un raisonnement par équivalences :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F \Longleftrightarrow (\bar{A})^c = \left(\bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F\right)^c$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{{}^cA}} = \bigcup_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F^c$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{{}^cA}} = \bigcup_{\substack{({}^cF) \text{ ouvert} \\ ({}^cF) \subset ({}^cA)}} F^c$$

$$\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{{}^cA}} = \bigcup_{\substack{\theta \text{ ouvert} \\ \theta \subset ({}^cA)}} \theta$$

Ce qui est vrai d'après prop 2 – 3°) $\square$

6) $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A ?

On procède d'une manière analogue à : « $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A » $\square$

7) $\bar{A} = A \iff A$ est un fermé ?

$\bar{A} = A \iff {}^c(\bar{A}) = {}^cA$

$\iff \overset{\circ}{\overbrace{({}^cA)}} = {}^cA$

$\iff {}^cA$ ouvert

$\iff A$ fermé $\square$

$\mathring{A} = A \iff A$ ouvert

Prop 5

Soit $A \subset E$. Soit $x \in E$. On a :

$$\boxed{d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}}$$

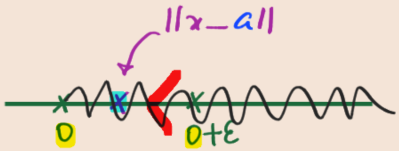
Remarque

On retrouve que : $\left(\text{Si } x \in A \text{ alors } d(x, A) = 0\right)$

Car $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$ (vu que $A \subset \bar{A}$) $\square$

Démo

$d(x, A) = 0 \iff \inf\limits_{a \in A}(\|x - a\|) = 0$



$\iff (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon)$ (la caractérisation de la borne inf)

$\iff (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a \in B(x, \varepsilon))$

$\iff (\forall \varepsilon > 0, A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset)$

$\iff x \in \bar{A}$ $\square$

$$\boxed{x \in \bar{A} \iff (\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset)}$$

Déf 6

Soit $A \subset E$.

La **frontière** de A est la partie de E définie par :

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

5) Partie dense dans un evn

Déf 1

Soit A une partie de E.

A est dite **dense** dans E si et ssi $\bar{A} = E$

Prop 2

Soit A une partie de E.

1) A est dense dans E si et ssi toute boule ouverte rencontre A.

2) Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in E, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$$

Démo

Soit A une partie de E. Montrons que :

A dense dans $E \iff (\forall x \in E, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset)$

On a :

A dense dans $E \iff \bar{A} = E$

$\iff E \subset \bar{A}$

$\iff \forall x \in E, x \in \bar{A}$

$\iff \forall x \in E, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ $\square$

NB : On retrouve la densité du Sup

On est dans l'evn $\mathbb{R}$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On a :

A dense dans $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ (Toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ rencontrent A)

$\Leftrightarrow (\forall a<b,\ ]a,b[\cap A\neq\emptyset)$ (les boules ouvertes dans $\mathbb{R}$ sont les $]a,b[$)

$\Leftrightarrow (\forall a<b,\ \exists x\in A$ tel que $x\in\,]a,b[)$

D'où :

$\boxed{\text{(A dense dans } \mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{(Entre deux réels existe au moins un élément de A)}}$

définition de la densité vue au Sup

6) Caractérisations séquentielles

Prop 1 (Caractérisation séquentielle d'un point adhérent)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $x\in\bar{A}$

2) x est limite d'une suite à valeurs dans A.

Autrement dit

$$\boxed{x\in\bar{A} \Leftrightarrow \left(\exists (a_n)\in A^{\mathbb{N}},\ x=\lim_{n\to+\infty} a_n\right)}$$

Démo

$\boxed{1)\Rightarrow 2)}$

Supp que $x\in\bar{A}$.

Mq que : x est limite d'une suite à valeurs dans A.

$x\in\bar{A} \Rightarrow (\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\emptyset)$

$\overset{\text{SI}}{\Rightarrow} \left(\forall n\in\mathbb{N},\ B(x,\frac{1}{n+1})\cap A\neq\emptyset\right)$

$\Rightarrow \left(\forall n\in\mathbb{N},\ \exists a_n\in A \text{ tel que } \|a_n-x\|<\frac{1}{n+1}\right)$

D'où l'existence d'une suite $(a_n)_n\in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$ $\square$

$\boxed{2) \Longrightarrow 1)}$

Supp que x est limite d'une suite à valeurs dans A.

Mq que : $x \in \bar{A}$.

Soit $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n a_n = x$

On veut Mq que $x \in \bar{A}$.

Soit alors $r > 0$. Mq que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

C.à.d Mq qu'il existe $a \in A$ tel $\|x - a\| < r$.

On a $\lim_n a_n = x \Longrightarrow (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x - a_n\| < r)$

On a alors $a_N \in A$ et que $\|x - a_N\| < r$ $\square$

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle d'un fermé)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est un fermé.

2) Toute suite convergente à valeurs dans A, sa limite appartient à A.

Autrement dit

$$\Big(A \text{ est un fermé}\Big) \Longleftrightarrow \left(\begin{pmatrix} \lim_n x_n = l \in E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A \end{pmatrix} \Rightarrow (l \in A) \right)$$

Démo

$$\Big(A \text{ est un fermé}\Big) \Longleftrightarrow \bar{A} = A$$

$$\Longleftrightarrow \bar{A} \subset A \quad (\text{car } A \subset \bar{A})$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in \bar{A},\ x \in A)$$

$$\underset{(\text{d'après prop } 1)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{l}\text{Toute suite convergente à valeurs dans } A, \\ \text{sa limite appartient à } A.\end{array}\right) \square$$

Corollaire 3 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dense dans E

2) Tout élément de E est limite d'une suite à valeurs dans A.

Autrement dit

$$\left(A \text{ est dense dans } E\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in E, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = x\right)$$

Démo

$$\left(A \text{ est dense dans } E\right) \Leftrightarrow \bar{A} = E$$

$$\Leftrightarrow E \subset \bar{A} \quad (\text{car } \bar{A} \subset E)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in \bar{A})$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in E, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to+\infty} a_n = x\right)$$

$\square$

NB :

1) Les notions suivantes ne dépendent pas de la norme équivalente choisie :

Intérieur – Adhérence – Voisinage – Densité – Ouvert – Fermé

2) Quand on est en dimension finie, on peut choisir n'importe quelle norme.

Ex 1

$$1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mq que $1_{\mathbb{Q}}$ est nul part continue (càd n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$).

Ex 2

Montrer que les parties suivantes sont des fermés de $\mathbb{R}^2$:

1) $\mathcal{E} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$; où $0 < a < b$.

2) C_f, la courbe de f, où $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution

1) $\mathcal{E} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$; où $0 < a < b$.

M que $\mathcal{E}$ est un fermé de l'evn $\mathbb{R}^2$.

Utilisons la caractérisation séquentielle d'un fermé.

Soit alors une suite $(X_n)_n$ convergente à valeurs dans $\mathcal{E}$.

M que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \in \mathcal{E}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (x_n, y_n)$; où $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

On a : $X_n \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (x_n, y_n) \in \mathcal{E}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_n^2}{a^2} + \frac{y_n^2}{b^2} = 1.$$

Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = (\alpha, \beta)$. On veut montrer que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$.

Càd que $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = (\alpha, \beta) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (\alpha, \beta)$

$$\overset{S!}{\Rightarrow} \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta \end{cases}$$

Or : $\left(\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{x_n^2}{a^2}+\frac{y_n^2}{b^2}=1\right)$

Alors par passage à la limite on a : $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$ CQFD

Enfin $\mathcal{E}$ est un fermé de l'evn $\mathbb{R}^2$.

---

2) C_f, la courbe de f, où $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Mq que C_f est un fermé de l'evn $\mathbb{R}^2$.

On a : $C_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=f(x)\}$.

Utilisons la caractérisation séquentielle d'un fermé.

Soit alors une suite $(X_n)_n$ convergente à valeurs dans C_f.

Mq que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n\in C_f$.

Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=(x_n,y_n)$; où $x_n,y_n\in\mathbb{R}$.

On a : $X_n\in C_f \iff (x_n,y_n)\in C_f$

$\iff y_n=f(x_n)$.

Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n=(\alpha,\beta)$. On veut montrer que $(\alpha,\beta)\in C_f$.

Càd que $\beta=f(\alpha)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n=(\alpha,\beta) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)=(\alpha,\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha\\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\beta\end{cases}$$

Or : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = f(x_n)\right)$

Alors par passage à la limite on a : $\beta = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$ et f Continue en α (Car Continue sur $\mathbb{R}$)

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ (d'après la caract séquent de la continuité)

Par suite $\beta = f(\alpha)$

CQFD

Enfin, C_f est un fermé de l'evn $\mathbb{R}^2$. $\square$

Ex 3

Montrer que la partie suivante est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < f(x)\}$, où $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution

M que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Càd que ${}^{c}\Omega$, son complémentaire, est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

On a : $${}^{c}\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant f(x)\}$$

On fait via la Caractérisation séquentielle d'un fermé, tout comme dans l'Ex 2.

« Terminez Chez-vous »

---

7) Parties Compactes d'un evn

Déf 1 Soit $K \subset E$.

K est dite partie compacte de E si et ssi de toute suite à valeurs dans K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.

Càd

K est dite partie compacte de E $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l}\text{Si } (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}, \text{ alors il existe} \\ \text{une sous-suite } (x_{\varphi(n)})_n \text{ telle que} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K\end{array}\right)$

Autrement dit

K est dite partie compacte de E $\Longleftrightarrow$ $\left(\begin{array}{l}\text{Toute suite à valeurs dans } K \\ \text{possède une valeur d'adhérence} \\ \text{appartenant à } K\end{array}\right)$

Prop 2

Si K est un compact alors K est fermé borné.

Démo

Supp que K est un compact et Mq que K est fermé borné.

i) K est un fermé ?

Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{\infty} x_n = l \in E$.

Mq que $l \in K$.

On a $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et K compact

Alors (x_n) possède une valeur d'adhérence appartenant à K.

Or $\lim_n x_n = l$, alors l est son unique valeur d'adhérence.

D'où $l \in K$. $\square$

ii) K est borné ?

Raisonnons par l'absurde, et supp que K n'est pas borné.

K borné $\Leftrightarrow (\exists M \geq 0, \forall x \in K, \|x\| \leq M)$

$\Rightarrow (\forall M \geq 0, \exists x \in K, \|x\| > M)$

$\overset{\text{Si}}{\Longrightarrow} (\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in K, \|x_n\| > n)$ ☆

Considérons la suite (x_n), on a (x_n) à valeurs dans K et K compact.

D'où l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = \|l\|$$

D'autre part, on a d'après ☆ que : $\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = +\infty$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty$

Ce qui est absurde $\square$

Prop 3 Soit $(x_n)_n$ une suite à valeur dans un compact K. On a :

$$\Big((x_n)_n \text{ Converge} \Big) \Longleftrightarrow \Big((x_n)_n \text{ possède une unique valeur d'adhérence} \Big)$$

Démo

$(\Longrightarrow)$ Déjà vue.

$(\Longleftarrow)$

Supp que $\Big((x_n)_n$ possède une unique valeur d'adhérence, notons-la $L \Big)$

Mq $\Big((x_n)_n$ Converge $\Big)$

On montrera que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$

Raisonnons par l'absurde, et supposons le contraire ; alors :

$$\left(\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \| x_n - L \| > \varepsilon \right)$$

On a : $\left(\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \| x_n - L \| > \varepsilon \right)$

Pour $N = 0$, $\exists n_0 > 0$, $\| x_{n_0} - L \| > \varepsilon$

Pour $N = n_0$, $\exists n_1 > n_0$, $\| x_{n_1} - L \| > \varepsilon$

Pour $N = n_1$, $\exists n_2 > n_1$, $\| x_{n_2} - L \| > \varepsilon$

ainsi de suite.

On a : $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$

Notons pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $n_k = \varphi(k)$.

Alors $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \cdots$

D'où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Ainsi : $\left(x_{\varphi(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \| x_{\varphi(n)} - L \| > \varepsilon \right)$ Ω

Or $\begin{pmatrix} K \text{ compact} \\ (x_{\varphi(n)})_n \in K^{\mathbb{N}} \end{pmatrix}$, alors il existe une sous-suite

$(x_{\varphi(\psi(n))})_n$ convergente (donc vers L ; l'unique val d'adh)

$\Rightarrow \|x_{\varphi(\psi(n))} - L\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Omega \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{\varphi(\psi(n))} - L\| > \varepsilon)$

Par passage à la limite, on a alors $\boxed{0 \geqslant \varepsilon}$

Ce qui est absurde $\boxed{\text{Fin}}$

Attention

Une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})_n$ est de la forme $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$

non pas $(x_{\psi(\varphi(n))})_n$.

Prop 4

Le produit cartésien de deux compacts est un compact.

Càd

Si $\begin{pmatrix} K_1 \text{ compact de } E_1 \\ K_2 \text{ compact de } E_2 \end{pmatrix}$ alors $K_1 \times K_2$ compact de $E_1 \times E_2$

Démo

Supp $\begin{pmatrix} K_1 \text{ compact de } E_1 \\ K_2 \text{ compact de } E_2 \end{pmatrix}$ et Mque $(K_1 \times K_2 \text{ compact de } E_1 \times E_2)$

Soit $((x_n, y_n))_n \in (K_1 \times K_2)^{\mathbb{N}}$.

Mq qu'il existe une sous-suite $((x_{h(n)}, y_{h(n)}))_n$ qui converge vers un élément de $K_1 \times K_2$.

C.à.d tq que $\begin{cases} \lim_n x_{h(n)} \in K_1 \\ \lim_n y_{h(n)} \in K_2 \end{cases}$

On a $(x_n)_n \in K_1^{\mathbb{N}}$ et K_1 compact

$\Rightarrow$ Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ tq $\lim_n x_{\varphi(n)} = \alpha \in K_1$

Et on a $(y_{\varphi(n)})_n \in K_2^{\mathbb{N}}$ et K_2 compact

$\Rightarrow$ Il existe une sous-suite $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)_n$ tq $\lim_n y_{\varphi(\psi(n))} = \beta \in K_2$

Or $\lim_n x_{\varphi(n)} = \alpha$ alors $\lim_n x_{\varphi(\psi(n))} = \alpha \in K_1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lim_n x_{\varphi(\psi(n))} = \alpha \in K_1 \\ \lim_n y_{\varphi(\psi(n))} = \beta \in K_2 \end{array}} \quad \square$$

Corollaire 5

Soit $n \geq 2$.

Si $K_1, \dots, K_n$ sont des compacts des evn $E_1, \dots, E_n$ respectivement,

alors $K_1 \times \dots \times K_n$ est un compact de l'evn $E_1 \times \dots \times E_n$.

Démo

Via (Prop 5) et par récurrence.

IV) Espaces vectoriels normés complets

Déf 1 Soit $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

$(U_n)_n$ est dite suite de Cauchy si et ssi :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|U_p - U_q\| \leq \varepsilon)$$

Prop 2

1) Toute suite de Cauchy est bornée.
2) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Démo

1) Toute suite de Cauchy est bornée ?

Soit $(U_n)_n$ une suite de Cauchy. Mq qu'elle est bornée.

Pour $\varepsilon = 1 > 0$ (par exemple), on a :

$$\left(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ \|U_p - U_q\| \leq 1\right)$$

$$\Rightarrow \forall p \geq N,\ \|U_p - U_N\| \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall p \geq N,\ \|U_p\| \leq \underbrace{\|U_p - U_N\|}_{\leq 1} + \|U_N\|$$

$$\Rightarrow \forall p \geq N,\ \|U_p\| \leq \|U_N\| + 1$$

En posant $M = \max\left(\|U_0\|, \dots, \|U_{N-1}\|, \|U_N\| + 1\right)$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|U_p\| \leq M$$

D'où $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée $\square$

---

2) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Supp $(U_n)_n$ converge vers $l \in E$.

Mq que $(U_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Mq qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\left(\forall p, q \geq N,\ \|U_p - U_q\| \leq \varepsilon\right)$

On a $\begin{pmatrix} \varepsilon > 0 \\ \lim_n U_n = l \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|U_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$

D'où $\left(\forall p, q \geq N,\ \|U_p - U_q\| \leq \underbrace{\|U_p - l\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|l - U_q\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon\right)$

Ainsi :

$$\left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|U_p - U_q\| \leq \varepsilon\right) \square$$

NB

On vient de voir que :

$(U_n)_n$ converge $\Longrightarrow$ $(U_n)_n$ suite de Cauchy

Toutefois, la réciproque n'est pas toujours vraie.
Un evn dans lequel la réciproque est vraie s'appelle espace Complet ou espace de Banach (1892 – 1945 ; Polonais)

Dans un espace Complet, on a l'équivalence :

$(U_n)_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $(U_n)_n$ suite de Cauchy

Prop 3 (admise)

Tout evn de dimension finie est un espace Complet.

Fin