

CONCOURS COMMUN 2005
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 19 mai 2005 de 14h00 à 18h00

EXTRAIT

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Obtenir l'ensemble de définition D de f .

A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?

A - 3) Justifier que f est de classe C^1 sur $[0 ; 1[$.

A - 4) Dresser le tableau de variations de f .

On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B - 3) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

B - 4) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

B - 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

B - 6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \frac{1+x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ avec $h(x) = \ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Etudier les variations de g .

C - 2) Déterminer la limite de g en 1.

C - 3) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f .
Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

E - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K .

E - 1) On pose $y = \frac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) .

E - 2) Résoudre (E_2) sur K . On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$.
Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K . On a donc ainsi $z(x) = \frac{x}{\ln(ax)}$.

E - 3) Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \frac{x}{\ln(ax)}$.

Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre 0 dont on précisera le rapport.

F - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On pose $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

F - 1) Déterminer l'ensemble de définition J de H .

F - 2) Etudier la limite de H en 0.

F - 3) Justifier qu'il existe un réel a dans $]0; 1]$ tel que

$$\forall x \in [a; 1[, \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

En déduire la limite de H à gauche en 1.

FIN

