

STRUCTURES ALGÈBRIQUES
ANNEAUX...**Exercice 1 :**

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

On rappelle qu'un élément a de A est dit **nilpotent** si et seulement s'il existe un entier non nul n tel que $a^n = 0$.

- 1) Soient a et b deux éléments nilpotents de A et qui commutent.
Montrer que $(a + b)$ et ab sont aussi nilpotents.
- 2) Soient maintenant a et b deux éléments de A tels que ab soit nilpotent.
Montrer que ba est aussi nilpotent.
- 3) Soit a un élément nilpotent de A .
Montrer que $(1 - a)$ est inversible et préciser son inverse en fonction des puissances de a .

NB : Questions classiques rencontrées avec les anneaux particuliers $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ et $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Exercice 2 :

- 1) Quels sont les sous-corps de \mathbb{Q} ?
- 2) Quels sont les idéaux d'un corps K ?

Exercice 3 :

Soit f un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- 1) i) Justifier que

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$$

ii) En déduire que f est croissante sur \mathbb{R} .

- 2) Montrer que :

i) $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = r$

ii) $f = id_{\mathbb{R}}$

Indice : vous pouvez utiliser la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 4 :

Un complexe est dit *entier de Gauss* quand sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des entiers relatifs.

Considérons l'anneau des entiers de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, on note $\mathcal{N}(z) = |z|^2$. Remarquons que $\mathcal{N}(zz') = \mathcal{N}(z)\mathcal{N}(z')$. Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 5 :

Définitions : $(A, +, \times)$ étant un anneau.

Un idéal I de A est dit *principal* s'il existe $a \in A$ tel que $I = aA$.

L'anneau $(A, +, \times)$ est dit *principal* quand tous ses idéaux sont principaux.

On se propose de montrer que l'anneau produit $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ est principal.

1) Soit I un idéal de \mathbb{Z}^2 .

Notons $I_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (a, 0) \in I\}$ et $I_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (0, a) \in I\}$.

Montrer que

i) I_1 et I_2 sont des idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

ii) $I = I_1 \times I_2$.

2) Conclure.

Exercice 6 :

L'objectif de l'exercice est de montrer la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

1) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Montrer que H est de la forme $H = \langle \bar{a} \rangle$, où a divise n .

2) Soit d un entier divisant n . Notons $a = n/d$. Montrer que :

i) $\langle \bar{a} \rangle$ est l'unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d .

ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(d)$ éléments d'ordre d .

3) Conclure.

Exercice 7 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Définition : Soit I un idéal de A . On appelle *radical* de I la partie \sqrt{I} de A définie par

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$$

1) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A contenant I .

2) Soient I et J deux idéaux de A et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbf{a)} \sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \mathbf{b)} \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}, \quad \mathbf{c)} \sqrt{I^n} = \sqrt{I}$$

3) Ici $A = \mathbb{Z}$. Déterminer le radical de l'idéal $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 :

Considérons la matrice carrée d'ordre n , $T = (T_{ij})$ définie par

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i|j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons $D = \text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$, où φ l'indicatrice d'Euler.

Admettons l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

- 1) Calculer le (i, j) ème coefficient de la matrice tTDT en fonction de $i \wedge j$.
- 2) En déduire $\det(S)$; où $S = (i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Dite la matrice de *Smith*.

Exercice 9 :

Résoudre dans \mathbb{Z} les systèmes suivants :

- 1) $\begin{cases} x \equiv 2 [6] \\ x \equiv 3 [11] \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x \equiv 2 [6] \\ x \equiv 3 [11] \\ x \equiv 4 [7] \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 8x \equiv 4 [10] \\ 9x \equiv 3 [21] \end{cases}$