Exercice 8 :

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2) Etudier la monotonie et la convexité de ζ.
3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.
   ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.
   iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.
5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
   Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, pour tout $n \geq 1$ et $x \in]1, +\infty[$.

Pour montrer que f est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, il suffit de montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

b) $\sum_{n \geq 1} f_n$ CS sur $]1, +\infty[$

c) $\forall p \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ CU sur tout segment $[a,b]$ de $]1, +\infty[$.

a) est claire

b) est claire aussi ; $\sum \frac{1}{n^x}$ converge pour tout $x > 1$ (car c'est une série de Riemann.

c) Soit $p \geq 1$. Soit $[a,b] \subset]1, +\infty[$. On a :

$\forall n \geq 1, \forall x \in [a,b], f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$

$\Rightarrow \left(\forall n \geq 1, \forall x \in [a,b], |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a} \right)$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge, car si on prend $1 < \gamma < a$, on aura $n^\gamma \cdot \frac{(\ln n)^p}{n^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Et donc $\dfrac{(\ln n)^p}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$

et puisque $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge (car $\gamma > 1$)

D'où $\sum \dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge.

Ainsi, $\sum\limits_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement, et donc converge uniformement sur $[a,b]$.

Enfin, ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, et on a :

$$\forall p \geq 1,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

2) i) Monotonie de ζ

ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$, et pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

D'où ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

2) ii) Convexité de ζ

ζ est 2 fois dérivable sur $]1,+\infty[$, et pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

D'où ζ est convexe sur $]1,+\infty[$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = ?$

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

Pour pouvoir intervertir, il suffit de vérifier :

a) $\forall n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = l_n \in \mathbb{R}$

b) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ Converge uniformement sur $[2, +\infty[$.

Pour a)

Soit $n \geq 1$.

Si $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\overbrace{-x}^{\to -\infty}(\overbrace{\ln n}^{>0})} = 0$$

Si $n = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

Pour b)

$\forall n \geq 1, \forall x \in [2, +\infty[, \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

et on a $\sum \frac{1}{n^2}$ Converge $(2 > 1)$

D'où $\sum \frac{1}{n^x}$ CN, donc CU sur $[2, +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

$= 1$, car $\ell_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$$\forall n \geq 1 , \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$$

Car $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n, n+1]$.

$$\text{D'où : } \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{= \zeta(x)}$$

$$\Longrightarrow \left(\forall x > 1 , \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \right)$$

Or $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Alors $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$

ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.

Clé : On encadre $\zeta(x)$ puis on tire $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim}$?

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On encadre d'abord $\frac{1}{n^x}$, puis on introduit la somme $\sum_n^{+\infty}$:

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt$$

Car $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n-1,n]$ et sur $[n,n+1]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1}} \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}$$

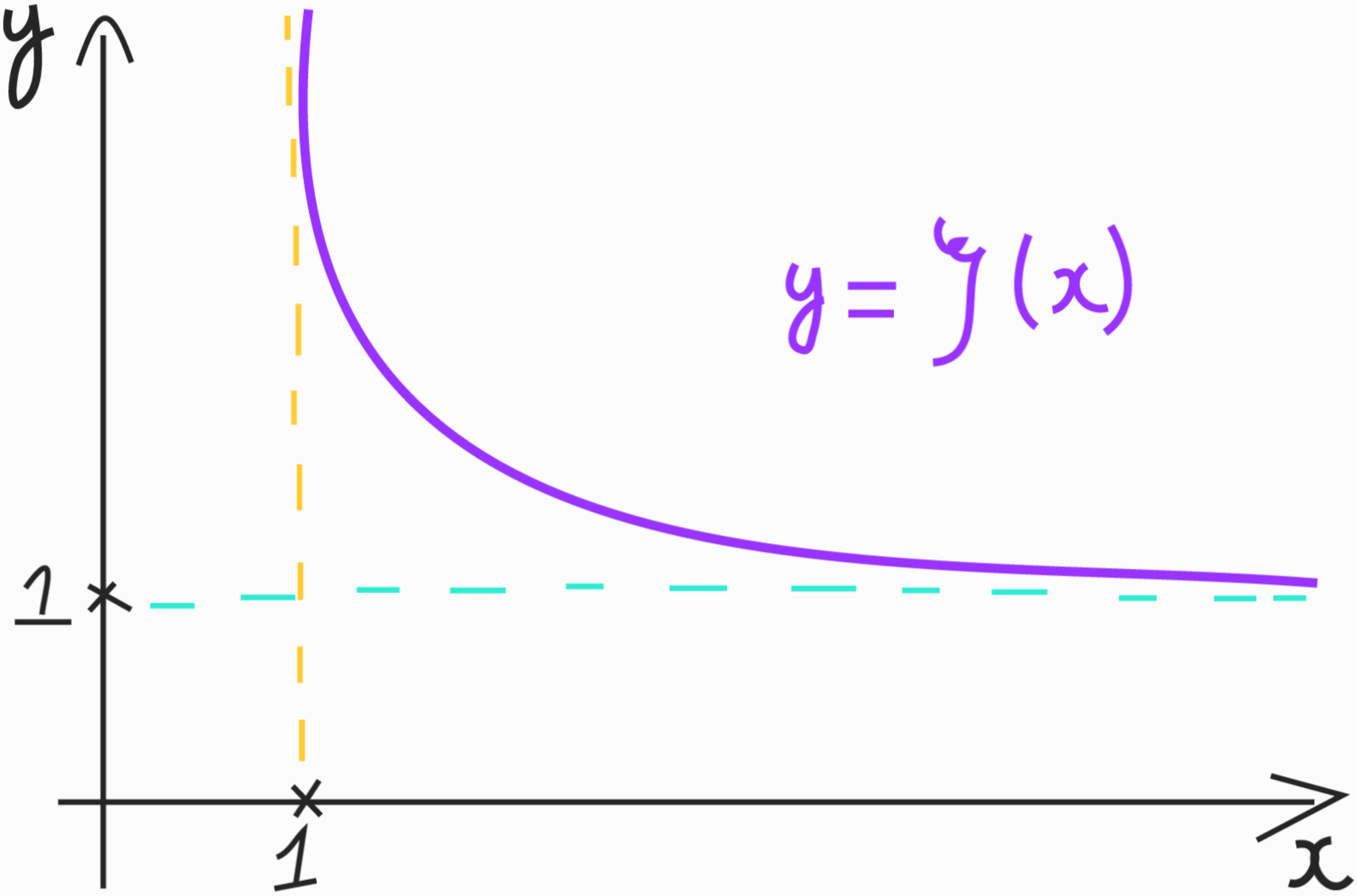
$$\Rightarrow \forall x > 1, \quad \frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

Soit :
$$\boxed{\forall x > 1, \quad \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1}$$

Or $\left(\frac{1}{x-1} + 1\right) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ Car $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Alors $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.



5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Considérons la fonction $h : x \mapsto \ln(\zeta(x))$.
h est bien deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad h''(x) = \frac{\zeta''(x)\,\zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{(\zeta(x))^2}$$

Alors

$$\big(h \text{ est convexe sur }]1,+\infty[\big) \iff \left(\forall x\in]1,+\infty[,\ \zeta''(x)\zeta(x)-(\zeta'(x))^2 \geqslant 0\right)$$

$$\iff \left(\forall x\in]1,+\infty[,\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)\right)$$

Soit $x>1$. Soit $N\geqslant 1$. On a :

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}}\right)\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}}\right)^2\right)\times\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}}\right)^2\right) \quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

Ainsi :

$$\forall N\geqslant 1,\ \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)$$

Par passage à la limite « $N\to+\infty$ », on obtient :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)$$

Fin Ex 8

Exercice 14:

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

a) i) $D_f = ?$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_f \iff$ (la série $\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge)

Cas 1 : Si $x > 0$

$\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge car $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

Cas 2 : Si $x \leq 0$

$\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement car $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$

Ainsi :

$x \in D_f \iff x > 0$

Et donc $D_f =]0, +\infty[$

a) ii) Montrons que f est continue sur $]0,+\infty[$:

Posons $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$.

On a : $\forall x \in]0,+\infty[, \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

Pour montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$, il suffit de vérifier que :

A) $\forall n\geq 1$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

B) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge unif sur tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$.

Pour A) ; c'est bien vérifié.

Pour B) :

Soit $[a,b]\subset]0,+\infty[$. M. que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Soient $n\geq 1$ et $x\in[a,b]$. On a :

$$|f_n(x)|=e^{-x\sqrt{n}}\leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que $\sum_{n\geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, car $a>0$.

D'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv normalement, donc uniformément sur $[a,b]$.

Enfin, f est continue sur $]0,+\infty[$

---

b) M que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$:

Méthode 1

On montrera que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et que :

$$(\forall x>0,\ f'(x)<0)$$

Montrons les points suivants pour tirer que $f\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$:

A) $\forall n\geq 1$, f_n de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

B) $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv simplement sur $]0,+\infty[$.

C) $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]\subset]0,+\infty[$.

Pour A) : C'est bien vérifié.

Pour B) : Déjà fait.

Pour C) : Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Mq que $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a,b]$. On a :

$|f_n'(x)| = \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$

et $\sum_n \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $\sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV.

D'où $\sum f_n'$ CN, et donc conv unif sur $[a,b]$.

De A), B) et C) on tire que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et que :

$$\left(\forall x>0 \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} < 0\right)$$

Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Méthode 2

On a $\left(\forall x>0,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$

Et $\forall n \geq 1$, $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

D'où f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Car pour tout $x<y$ dans $]0,+\infty[$, on a :

$$\left(\forall n \geq 1,\ e^{-y\sqrt{n}} < e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{n}}}_{= f(y)} < \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}}_{= f(x)}$$

$$\Rightarrow f(y) < f(x)$$

---

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

Pour qu'on puisse intervertir $\lim\limits_{x\to+\infty}$ avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$, il suffit de vérifier les points suivants :

A) $\forall n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = l_n \in \mathbb{R}$

B) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

Pour A) : $\forall n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$

Pour B) :

Il suffit de montrer la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ sur $[1,+\infty[$.

Soient alors $n \geq 1$ et $x \in [1,+\infty[$. On a :

$$\left|e^{-x\sqrt{n}}\right| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que la série positive $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, car $e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^2}$ converge.

D'où la convergence normale voulue.

De A) et B) on tire que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)}_{=0}$$

$$= 0$$

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} ?$

L'idée est classique ; c'est à retenir

Soit $x > 0$.

$$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$$

Car $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \qquad (\Omega)$$

Et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} u e^{-xu}\,du \quad \left(\text{avec le chang de variable } u = \sqrt{t}\right)$$

$$= 2\int_0^{+\infty} u \left(\frac{e^{-xu}}{-x} \right)' du$$

$$= 2\left(\underbrace{\left[u \frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x}\,du \right) \quad \left(\text{via une intégration par parties}\right)$$

$$= \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu}\,du$$

$$= \frac{2}{x} \left[\frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{x^2}$$

Et on a aussi :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^{+\infty} u e^{-xu}\,du \quad \left(\text{avec le chang de variable } u=\sqrt{t}\right)$$

$$= 2\int_1^{+\infty} u\left(\frac{e^{-xu}}{-x}\right)'du$$

$$= 2\left(\underbrace{\left[u\,\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_1^{+\infty}}_{=\frac{e^{-x}}{x}} - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-xu}}{-x}\,du\right) \quad \left(\text{via une intégration par parties}\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-xu}\,du\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_1^{+\infty}\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1)$$

(2) devient :

$$\forall x>0,\ \frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^2}$$

Or $\frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ et $\frac{2}{x^2} > 0$

Alors $$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

Fin Ex 14