Déterminants

Applications multilinéaires

Exercice 1 [01410] [correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soient f une forme linéaire sur E, p la projection vectorielle sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{Id} - p$ sa projection complémentaire.
Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur E.

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 2 [01411] [correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que l'espace E est de dimension paire.

Exercice 3 [01412] [correction]
Soit $V = \{x \mapsto \mathrm{e}^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.
a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
b) Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice 4 [03071] [correction]
Soit f un en endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
a) Montrer qu'il existe d'uniques complexes a, b tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b\bar{z}$$

b) Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.

Déterminant d'une matrice

Exercice 5 [01414] [correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Former une relation liant $\det(A)$ et $\det \bar{A}$.

Exercice 6 [01415] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 [01416] [correction]
Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre $2n + 1$. Montrer que

$$\det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque A est d'ordre pair ?

Exercice 8 [01417] [correction]
Comparer $\det(a_{i,j})$ et $\det((-1)^{i+j} a_{i,j})$ où $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9 [03382] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

Calcul de déterminants

Exercice 10 [01418] [correction]
Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$.

Exercice 11 [01419] [correction]
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})$.
En déduire en particulier $\det(\max(i,j))$ et $\det(\min(i,j))$.

Exercice 12 [01420] [correction]
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 13 [01421] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on a

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Exercice 14 [01422] [correction]
[Identité de Lagrange]
Calculer de deux façons :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$$

Exercice 15 [01423] [correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
a) Calculer ${}^tA.A$. En déduire $\det A$.
b) Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$

Exercice 16 [01425] [correction]
Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}_{[n]}$$

a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.
b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 17 [03377] [correction]
a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Calcul par relation de récurrence

Exercice 18 [01426] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 19 [01427] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 20 [01428] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 21 [01429] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite (H_n) avec

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 22 [01430] [correction]
Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 23 [01431] [correction]
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en notant

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 24 [01432] [correction]
Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice 25 [03254] [correction]
Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Système de Cramer

Exercice 26 [01437] [correction]
Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Résoudre sur $\mathbb{K}$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^3x+b^3y+c^3z=d^3 \end{cases}$$

Exercice 27 [01438] [correction]
Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

en fonction de $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 28 [01439] [correction]
Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases}$$

Exercice 29 [01440] [correction]
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts.
a) Résoudre

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$

en introduisant : $P = X^3 - (x+yX+zX^2)$
b) Même question pour

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^4 \\ x+by+b^2z=b^4 \\ x+cy+c^2z=c^4 \end{cases}$$

Exploitation de déterminants

Exercice 30 [01441] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Pour quelles valeurs de λ, a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$?
b) Déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 31 [01442] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon], A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Comatrice

Exercice 32 [01443] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
a) Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$.
b) Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si, et seulement si, $\det A = \pm 1$.

Exercice 33 [01444] [correction]
Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Etablir

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n \\ \mathrm{rg}(A) = n-1 & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1 \\ \mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 & \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0 \end{cases}$$

b) Montrer

$$\det(\mathrm{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

c) En déduire

$$\mathrm{com}\,(\mathrm{com}(A))$$

Exercice 34 [03142] [correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les comatrices de A et B commutent.

Exercice 35 [03260] [correction]
Résoudre l'équation

$$\mathrm{com} M = M$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 36 [03576] [correction]
a) Donner le rang de $B = {}^t(\mathrm{com} A)$ en fonction de celui de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
b) On se place dans le cas où $\mathrm{rg} A = n - 1$.
Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AC = CA = O_n$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$C = \lambda B$$

Calcul de rang

Exercice 37 [01445] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

a) Calculer $\det M$.
b) Déterminer, en fonction de α le rang de M.

Exercice 38 [01446] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
a) Calculer le déterminant de

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

b) En déduire le rang de $M(a,b)$ selon les valeurs des paramètres a et b.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$.
$\varphi(y,x) = f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(x)) = -\varphi(x,y)$. Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x'))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\lambda x + \mu x'))$ or f, p et q sont linéaires donc
$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x')))\, f(q(y)) - f(p(y))\,(\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x')))$
puis en développant et en réorganisant : $\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x',y)$.
φ est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

Exercice 2 : [énoncé]
Posons $n = \dim E$. Comme $\det(f^2) = \det(-I_n)$ on a $\det(f)^2 = (-1)^n \geqslant 0$, donc n est pair.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Il est clair que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k \mathrm{e}^x$.
$\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ forme une base de V, donc $\dim V = n+1$.
b) Pour $f(x) = P(x)\mathrm{e}^x$ on a $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))\mathrm{e}^x$.
D est bien une application de V dans V.
De plus la linéarité de D découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure $D \in \mathcal{L}(V)$.
Puisque $(x^k\mathrm{e}^x)' = (x^k + kx^{k-1})\mathrm{e}^x$ on a $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$ donc a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite $\det D = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) La famille $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Pour $a,b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1,i)$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b & \mathrm{Im}b - \mathrm{Im}a \\ \mathrm{Im}a + \mathrm{Im}b & \mathrm{Re}a - \mathrm{Re}b \end{pmatrix}$$

Pour f endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

dans la base $(1,i)$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \mathrm{Re}a + \mathrm{Re}b = \alpha \\ \mathrm{Im}a + \mathrm{Im}b = \beta \\ \mathrm{Im}b - \mathrm{Im}a = \gamma \\ \mathrm{Re}a - \mathrm{Re}b = \delta \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution qui est

$$a = \frac{\alpha+\delta}{2} + i\frac{\beta-\gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha-\delta}{2} + i\frac{\beta+\gamma}{2}$$

b) Le déterminant de f vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$

Exercice 5 : [énoncé]
Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

Exercice 6 : [énoncé]
Ici ${}^tA = \bar{A}$, donc $\det(A) = \det({}^tA) = \det \bar{A}$.
Comme

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : [énoncé]
Comme ${}^tA = -A$ on a

$$\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

donc $\det A = 0$.
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

Exercice 8 : [énoncé]
Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$. On a

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissance de (-1)

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(i)+i} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{n(n+1)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi

$$\det B = (-1)^{n(n+1)} \det A = \det A$$

car $n(n+1)$ est pair.

Exercice 9 : [énoncé]
En ajoutant la première colonne de A à chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à n ont pour coefficients $0, 2$ ou -2. On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient

$$\det A = 2^{n-1} \det B$$

avec B une matrice dont les coefficients sont $0, 1$ ou -1 de sorte que $\det B \in \mathbb{Z}$

Exercice 10 : [énoncé]
a) En développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

b) En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivante et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-a & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))$$

c) En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c-a & c- \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2- \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3- \end{vmatrix}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D = 2abc(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

d) En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

e) En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D = (a+b+2c)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc

$$D = (a+b+2c)(a-b)\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2-(b-c)^2)$$

puis

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

f) En retirant la première colonne aux suivantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$D = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix} \sin\frac{b+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \\ \cos\frac{b+a}{2} & \cos\frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

puis

$$D = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}$$

Exercice 11 : [énoncé]

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ 0 & a_2-a_3 & & a_{n-1}-a_n & a_n \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ (0) & & & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (a_1-a_2)(a_2-a_3)\dots(a_{n-1}-a_n)a_n$$

Pour $a_i = i$,

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (-1)^{n-1}n$$

Pour $a_i = n+1-i$,

$$\det(a_{\min(i,j)}) = 1$$

Exercice 12 : [énoncé]

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & & \star \\ & \ddots & \\ & a_1-a_2 & \\ (0) & & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1-a_2)^{n-1} \text{ via } \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \leftarrow C_n \end{matrix}$$

Exercice 13 : [énoncé]

Via $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercice 14 : [énoncé]

D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{vmatrix} = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Exercice 15 : [énoncé]
a) ${}^tAA = \operatorname{diag}(\delta,\delta,\delta,\delta)$ avec $\delta = a^2+b^2+c^2+d^2$. Par suite $\det A = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.
Or b,c,d fixés, par développement de déterminant, l'expression de $\det A$ est un polynôme en a unitaire de degré 4 donc

$$\det A = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

b) Avec des notations immédiates : $AA' = A''$ avec :

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' = ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$

Par égalité des déterminants et considération de signes

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)^2 = (a''^2+b''^2+c''^2+d''^2)^2$$

et les quantités suivantes étant positives

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$

avec $a'',b'',c'',d'' \in \mathbb{Z}$ par opérations.

Exercice 16 : [énoncé]
a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a-\lambda_1 & \cdots & a-\lambda_1 \\ b+x & \lambda_2-b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b+x & (0) & & \lambda_n-b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i-a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i-b)}{b-a} \text{ et } \beta = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i-a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i-b)}{b-a}$$

Exercice 17 : [énoncé]
a) En factorisant les colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne a fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Exercice 18 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = D_{n-2}$$

Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on a

$$D_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires : $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$ on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & (1) \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1.
Sachant $D_1 = 0$ et $D_2 = -1$, on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 20 : [énoncé]
En développant selon la deuxième ligne

$$D_n = -\begin{vmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1} = -1 + D_{n-1}$$

Puisque $D_1 = 1$ on obtient

$$D_n = 2 - n$$

Exercice 21 : [énoncé]
En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la dernière colonne à chacune des autres

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & n-1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

En développant selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & n & 0 \\ (1) & & & n \end{vmatrix}_{[n]} = nD_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$$

Par suite

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$\frac{D_n}{n!} = D_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

puis

$$D_n = (1 + H_n)n!$$

Exercice 22 : [énoncé]
En décomposant la première ligne en somme de deux lignes

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]} + \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ a & a+b & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a & a & & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

En retranchant la première colonne à toutes les autres dans le second déterminant, on obtient

$$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

Par récurrence, on en déduit

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \text{ si } a \neq b$$

et

$$D_n = (n+1)a^n \text{ si } a = b$$

Exercice 23 : [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & C_1^0 & C_1^1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-2}^{n-2} \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$D_n = D_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = D_1 = 1$$

Exercice 24 : [énoncé]
En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

Finalement

$$D_n = 1$$

Exercice 25 : [énoncé]
Cas $b = c$:
C'est un calcul classique, on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(i = 2, \ldots, n)$ pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Cas $b \neq c$:
Posons $D_n = \det A_n$. A chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c-a & a-b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & c-a & a-b \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + (a-b)D_{n-1} \text{ (avec } n \geqslant 2)$$

Ainsi

$$D_n = b(a-c)^{n-1} + b(a-b)(a-c)^{n-2} + \cdots + b(a-b)^{n-2}(a-c)^1 + (a-b)^{n-1}D_1$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a-c)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1-\frac{a-b}{a-c}} + a(a-b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

Exercice 26 : [énoncé]
a) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \dfrac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \dfrac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \dfrac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

b) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)(d+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

et y, z par symétrie.

Exercice 27 : [énoncé]
Le système est de Cramer via déterminant de Vandermonde.
$(1)+(2)+(3)$ donne

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

$(1)+j^2(2)+j(3)$ donne

$$y = \frac{a+bj^2+cj}{3}$$

et $(1)+j(2)+j^2(3)$ donne

$$z = \frac{a+bj+cj^2}{3}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$

Si $|a| \neq 1$ alors est le système est de Cramer et homogène

$$\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$$

Si $|a| = 1$ alors le système équivaut à une seule équation

$$x + ay + a^2 z = 0$$

car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit

$$\mathcal{S} = \left\{(-ay - a^2 z, y, z)/y, z \in \mathbb{C}\right\}$$

Exercice 29 : [énoncé]
Les deux systèmes proposés sont de Cramer via déterminant de Vandermonde.
a) Si x, y, z est sa solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$

On en déduit

$$x = abc,\ y = -(ab+bc+ca) \text{ et } z = a+b+c$$

b) Introduisons

$$P = X^4 - (x + yX + zX^2)$$

Si x, y, z est solution alors $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$

Puisque le coefficient de X^3 dans P est nul, la somme des racines de P est nulle et donc

$$a+b+c+d=0$$

puis

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c))$$

En développant, on obtient

$$x = \sigma_3\sigma_1,\ y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 \text{ et } z = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les expressions symétriques élémentaires en a, b, c.

Exercice 30 : [énoncé]

a) Après calculs

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

On a donc

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2 \text{ ou } 4$$

b) Après résolution de l'équation $f(x) = \lambda x$ pour $\lambda = 1, 2$ ou 4, on obtient

$$\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_2 + e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

convenables.

Exercice 31 : [énoncé]

Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On sait

$$\det(A + xB) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + xb_{\sigma(i),i})$$

La fonction $x \mapsto \det(A + xB)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas en 0 (car $\det(A) \neq 0$), donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de 0 ce qui résout le problème posé.

Exercice 32 : [énoncé]

a) Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

Par suite si tous les $a_{i,j}$ sont entiers, $\det A$ l'est aussi.
b) ($\Rightarrow$) Si A et A^{-1} sont à coefficients entiers alors $\det A \in \mathbb{Z}$ et $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$.
Or $\det A. \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$
Donc $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$.
($\Leftarrow$) Si $\det A = \pm 1$ alors A est inversible car de déterminant non nul
Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{com} A = \pm {}^t\text{com} A$$

Or la comatrice de A est formée des cofacteurs de A qui sont des entiers car égaux à des déterminants de matrices à coefficients entiers (car extraites de A).
Ainsi A^{-1} est une matrice à coefficients entiers

Exercice 33 : [énoncé]

a) Si $\text{rg}(A) = n$ alors A est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = n$$

Si $\text{rg}(A) \leqslant n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Par suite $\text{com}(A) = O_n$ et donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$$

Si $\text{rg}(A) = n-1$, exploitons la relation $A^t\text{com}(A) = \det(A).I_n = O_n$.
Soient f et g les endomorphismes de K^n canoniquement associés aux matrices A et ${}^t\text{com}(A)$.
On a $f \circ g = 0$ donc $\text{Im} g \subset \ker f$. Comme $\text{rg}(f) = n-1$, $\dim \ker f = 1$ et par suite $\text{rg}(g) \leqslant 1$.
Ainsi $\text{rg}(\text{com}(A)) \leqslant 1$.
Comme $\text{rg}(A) = n-1$, il existe un déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et par suite $\text{com}(A) \neq O_n$.
Finalement

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$$

b) Comme $A^t\text{com}(A) = \det(A).I_n$ on a

$$\det(A) \det \text{com}(A) = (\det A)^n$$

Si $\det A \neq 0$ alors
$$\det \operatorname{com}(A) = (\det A)^{n-1}$$
Si $\det A = 0$ alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) \leqslant 1 < n$ donc
$$\det(\operatorname{com}(A)) = 0$$

c) Si $\operatorname{rg}(A) = n$ alors
$${}^t\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)).\operatorname{com}(A) = \det(\operatorname{com}(A)).I_n = \det(A)^{n-1}.I_n$$
Donc
$${}^t\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = \det(A)^{n-1}\operatorname{com}(A)^{-1}$$
Or ${}^t\operatorname{com}(A).A = \det(A).I_n$ donc
$${}^t\operatorname{com}(A) = \det(A).A^{-1}$$
puis sachant ${}^t(B)^{-1} = ({}^tB)^{-1}$ on a :
$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = \det(A)^{n-2}A$$
Si $\operatorname{rg}(A) \leqslant n-1$ et $n \geqslant 3$ alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com}A) \leqslant 1 \leqslant n-2$ donc
$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = O_n$$
Si $n = 2$ alors pour
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = A$$

Exercice 34 : [énoncé]
Cas A et B inversibles
Puisque A et B commutent, leurs inverses commutent aussi
On en déduit
$$\frac{1}{\det A}{}^t(\operatorname{com}A)\frac{1}{\det B}{}^t(\operatorname{com}B) = \frac{1}{\det B}{}^t(\operatorname{com}B)\frac{1}{\det A}{}^t(\operatorname{com}A)$$
En simplifiant et en transposant on obtient
$$\operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B) = \operatorname{com}(B)\operatorname{com}(A)$$
Cas général
Pour p assez grand, les matrices
$$A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B + \frac{1}{p}I_n$$
sont inversibles et commutent donc
$$\operatorname{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)\operatorname{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right) = \operatorname{com}\left(B + \frac{1}{p}I_n\right)\operatorname{com}\left(A + \frac{1}{p}I_n\right)$$
En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient
$$\operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B) = \operatorname{com}(B)\operatorname{com}(A)$$

Exercice 35 : [énoncé]
Soit M solution de l'équation étudiée.
Puisque
$${}^t(\operatorname{com}M)M = \det(M)I_n$$
on obtient
$${}^tMM = \det(M)I_n$$
et donc
$$\operatorname{tr}({}^tMM) = n\det M$$
Or
$$\operatorname{tr}({}^tMM) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2$$
donc $\det M \geqslant 0$.
De plus, en passant la relation ${}^tMM = \det(M)I_n$ au déterminant, on obtient
$$(\det M)^2 = (\det M)^n$$
Cas $n \neq 2$
On obtient $\det M = 0$ ou 1.
Dans le cas $\det M = 0$, on obtient $\operatorname{tr}({}^tMM) = 0$ et donc $M = O_n$.
Dans le cas $\det M = 1$, on obtient ${}^tMM = I_n$ et donc M est une matrice orthogonale de déterminant 1.
Inversement, la matrice nulle et solution de l'équation étudiée et si M est une matrice orthogonale de déterminant 1 alors
$${}^t(\operatorname{com}M)M = I_n = {}^tMM$$
ce qui donne $\operatorname{com}M = M$ sachant M inversible.

Cas $n = 2$
Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\text{com}M = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc $\text{com}M = M$ si, et seulement si, M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 36 : [énoncé]
a) On sait $AB = BA = \det(A)I_n$.
Si $\text{rg}A = n$ alors A est inversible donc B aussi et $\text{rg}B = n$.
Si $\text{rg}A = n-1$ alors $\dim\ker A = 1$ et puisque $AB = O_n$, $\text{Im}B \subset \ker A$ puis $\text{rg}B \leqslant 1$.
De plus, la matrice A étant de rang exactement $n-1$, elle possède un mineur non nul et donc $B \neq O_n$. Finalement $\text{rg}B = 1$.
Si $\text{rg}A \leqslant n-2$ alors tous les mineurs de A sont nuls et donc $B = O_n$ puis $\text{rg}B = 0$.
b) Puisque $\text{rg}A = n-1$, $\dim\ker A = 1$ et $\dim\ker {}^tA = 1$.
Il existe donc deux colonnes X et Y non nulles telles que

$$\ker A = \text{Vect}X \text{ et } \ker {}^tA = \text{Vect}Y$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AM = MA = O_n$.
Puisque $AM = O_n$, $\text{Im}M \subset \ker A = \text{Vect}X$ et donc on peut écrire par blocs

$$M = (\lambda_1 X \mid \ldots \mid \lambda_n X) = XL$$

avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
La relation $MA = O_n$ donne alors $XLA = O_n$ et puisque $X \neq 0$, on obtient $LA = 0$ puis ${}^tA{}^tL = 0$. Ceci permet alors d'écrire L sous la forme $L = \lambda{}^tY$ puis M sous la forme

$$M = \lambda X{}^tY$$

Inversement une telle matrice vérifie $AM = MA = O_n$ et donc

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/AM = MA = O_n\} = \text{Vect}(X{}^tY)$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice B étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AC = CA = O_n$ est nécessairement colinéaire à B.

Exercice 37 : [énoncé]
a) En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n\alpha^n$$

b) Si $\det M \neq 0$ alors M est inversible et $\text{rg}M = n$.
Si $\det M = 0$ alors M n'est pas inversible donc $\text{rg}M < n$.
Or M possède une matrice extraite de rang $n-1$ donc $\text{rg}M = n-1$.
Finalement

$$\text{rg}M = \begin{cases} n-1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 38 : [énoncé]
a) En sommant toutes les colonnes sur la première colonne

$$\det M(a,b) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$$

puis en retirant la première ligne au suivante

$$\det M(a,b) = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(b-a)^{n-1}$$

b) Si $a = b = 0$ alors

$$\text{rg}M(a,b) = 0$$

Si $a = b \neq 0$ alors

$$\text{rg}(M(a,b)) = 1$$

Si $a \neq b$ et $a + (n-1)b \neq 0$ alors

$$\text{rg}M(a,b) = n$$

Si $a \neq b$ et $a + (n-1)b = 0$ alors

$$\text{rg}M(a,b) = n-1$$

car $M(a,b)$ possède une matrice de rang $n-1$ inversible puisque $a \neq b$ et $a + (n-2)b \neq 0$.