Etude d'intersections d'hyperplans vectoriels

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I – Description d'un sous-espace vectoriel en intersection d'hyperplans

1. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

1.a On suppose $H_1 \neq H_2$. Justifier $H_1 + H_2 = E$.

1.b Déterminer $\dim H_1 \cap H_2$ selon que $H_1 = H_2$ ou non.

2.a Soit H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Déterminer $\dim F \cap H$ selon que $F \subset H$ ou non.

2.b Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E.
Montrer que $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, distincts de E. On pose $p = \dim F$.
On se propose d'établir que F peut s'écrire comme intersection de $n - p$ hyperplans.
Dans un premier temps on suppose $F \neq \{\vec{o}\}$.

3.a Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que $\forall 1 \leq i \leq p, \vec{e}_i \in F$.
On pose, pour tout $i \in \{p+1, \dots, n\}$, $H_i = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

3.b Montrer que les H_i sont des hyperplans de E.

3.c Observer que $F = H_{p+1} \cap \dots \cap H_n$.

3.d On suppose maintenant que $F = \{\vec{o}\}$.
Montrer que F peut s'écrire comme intersection de n hyperplans.

Partie II – Décomposition d'un drapeau en intersection d'hyperplans

On considère un drapeau de E, c'est à dire une famille $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de E telle que :

(i) $\forall 0 \leq i \leq n, \dim F_i = i$,

(ii) $\forall 1 \leq i \leq n, F_{i-1} \subset F_i$.

1. Préciser F_0 et F_n.

2.a Justifier que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists \vec{e}_i \in F_i$ tel que $\vec{e}_i \notin F_{i-1}$.

2.b Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.

2.c Observer que $\forall 1 \leq i \leq n$, $F_i = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i)$.

3.a Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un hyperplan de E noté H_i tel que : $F_{i-1} = F_i \cap H_i$.

3.b Observer qu'alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $F_{i-1} = H_i \cap \dots \cap H_n$.