

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Extrait

Dans tout le problème

- E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
- Id est l'application identité sur E : $\text{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
- $L(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E ,
- $\text{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E ,
- $E^* = L(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E ,
- $A(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda x + y, z) &= \lambda \omega(x, z) + \omega(y, z), & \omega(x, \lambda y + z) &= \lambda \omega(x, y) + \omega(x, z), \\ \omega(x, y) &= -\omega(y, x).\end{aligned}$$

Pour tout $\omega \in A(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \omega(x, \cdot) : & E \rightarrow \mathbb{R} \\ & y \mapsto \omega(x, y) \end{array} \right.$$

Pour tout $\omega \in A(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi_\omega : & E \rightarrow E^* \\ & x \mapsto \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$$

Un élément ω de $A(E)$ est appelé **forme symplectique sur E** si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^* .

Un élément J de $L(E)$ est appelé **structure complexe sur E** s'il vérifie $J^2 = -\text{Id}$.

On dit qu'une forme symplectique ω sur E **dompte** une structure complexe J si $\omega(x, J(x)) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On note

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
- I_n la matrice unité de taille n ,
- lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\det$ l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- tM la transposée de la matrice M .

On identifie tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n .
2. Montrer que $\omega(x, x) = 0$ pour tout $\omega \in A(E)$ et pour tout $x \in E$.
3. Soit $\omega \in A(E)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E .
 - (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = {}^tXMY$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, \\ y &= y_1 b_1 + \dots + y_n b_n. \end{aligned}$$

On notera alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.

- (b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tM = -M$.
 - (c) Montrer que l'espace vectoriel $A(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.
 - (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
 - ($\mathcal{E}_1$): ω est une forme symplectique sur E .
 - ($\mathcal{E}_2$): Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.
 - ($\mathcal{E}_3$): $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ est inversible.
4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E , alors E est de dimension paire.

Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n est un entier pair ≥ 2 .

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

$$\begin{aligned} \omega_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto {}^tXJ_nY \end{aligned}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω sur E .

Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.

6. Traiter le cas où E est de dimension 2.
7. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- (a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u : F \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\tilde{u} : E \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à F coïncide avec u .

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E : \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_F : E & \rightarrow F^* \\ x & \mapsto \varphi_\omega(x)|_F \end{array} \right.$$

où $\varphi_\omega(x)|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F .

- (b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$.
- (c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F ?
- (d) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$.
- (e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F , alors $E = F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω .

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que ω dompte au moins une structure complexe sur E .

Partie II: Deux outils sur les polynômes

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq d$ à coefficients réels, pour tout $d \in \mathbb{N}$.

10. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls de degrés respectifs p et q strictement positifs. Montrer que l'application linéaire $L_{P,Q}$ définie par

$$\left| \begin{array}{ll} L_{P,Q} : \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ (V, W) & \mapsto VP + WQ \end{array} \right.$$

est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Construire une application non nulle  je l'ai ajouté

$$\left| \begin{array}{ll} r : \mathbb{R}_d[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto r(P) \end{array} \right.$$

 telle que, si $r(P)$ est non nul, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Indication: On pourra utiliser la question précédente.