

Réduction d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

- 1) Simplifier $f^2(x)$ pour tout $x \in \text{Im}(f)$.
- 2) Justifier que $\text{Im}(f)$ est stable par f .
Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}(f)$
- 3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $\text{Im}(f)$.
- 4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $\text{rg}(f)$ est un entier pair.

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes quand c'est possible :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

- 1) E l'espace des suites réelles bornées, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, f(u)(n) = u_{n+1} - u_n$$

- 2) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E, \phi(f) = f'$$

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$. Supposons que $\text{rg}(f) = 1$.

- 1) Montrer que tout vecteur non nul de $\text{Im}(f)$ est un vecteur propre de f .

2) Montrer que

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow f^2 \neq 0$$

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E) \quad X^3 + X = 0, \quad X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E) .

1) Montrer que

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(A) \oplus \ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que

$$\forall Y \notin \ker(A), \quad (Y, AY) \text{ est libre}$$

3) Déterminer le polynôme minimal de A .

4) Montrer que $\dim(\ker(A)) = 1$

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Quelles sont enfin les solutions de l'équation (E) ?

Exercice 7

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace non nulle.

Considérons l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$f(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$$

Notons $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$

1) Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

2) Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0, puis que $\dim(E_0(f)) = 1$

3) Montrer que $\operatorname{Im}(f) = F$, en précisant $\dim(F)$.

4) Montrer F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A)$.

5) Déduire que f est diagonalisable.

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

- 1) Montrer que M est diagonalisable.
- 2) Déterminer le polynôme minimal de M .
- 3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

1. Montrer que

$$1 \notin S_p(M) \Leftrightarrow M \text{ est inversible}$$

2. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.

Supposons l'existence de deux réels distincts a et b tels que :

$$(u - aI_E)(u - bI_E) = 0$$

Posons $p = \frac{1}{b-a}(u - aI_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - bI_E)$.

- 1) Calculer $p + q$, pq , qp , p^2 et q^2
- 2) En déduire que $E = \ker(p) \oplus \ker(q)$.
- 3) Justifier autrement pourquoi on a $E = \ker(p) \oplus \ker(q)$.
- 4) Déterminer les éléments propres de u , puis justifier que u est diagonalisable.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Considérons l'application ϕ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(M) = AM - MB$$

α et β sont deux valeurs propres respectives de A et B .

- 1) Vérifier que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- 2) Justifier l'existence de deux matrices colonnes non nulles C et D telles

$$AC = \alpha C \text{ et } {}^tBD = \beta D$$

- 3) Calculer $\phi(C {}^t D)$ en fonction de C, D, α et β .
4) En déduire que $(\alpha - \beta)$ est valeur propre de ϕ .

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E .

Montrer que si f et g **commutent** alors ils sont **simultanément** diagonalisables.

(c-à-d qu'il existe une base diagonalisant f et g .)