

Concours National Commun¹

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

Session 2025 - Filière MP

L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

EXERCICE
(Noté 4 points sur 20)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ à valeurs réelles. On note φ_f l'application définie, pour tout réel x , pour lequel l'intégrale existe, par

$$\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) e^{-t} dt$$

On suppose de plus que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |f(x, t)| \leq M$$

1.
 - a) Montrer que, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|f(x, t) e^{-t}| \leq M e^{-t}$.
 - b) En déduire que φ_f est définie sur $\mathbb{R}$.
 - c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) e^{-t} = 0$.
2. On considère les deux fonctions réelles g et h définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par,

$$g(x, t) = \cos(xt) \quad \text{et} \quad h(x, t) = \sin(xt)$$

- a) Vérifier que φ_g et φ_h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = 1 - x \varphi_h(x)$$

- c) Montrer, en appliquant une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_h(x) = x \varphi_g(x)$$

- d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- e) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^x \varphi_g(u) du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u) du = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_0^x \varphi_h(u) du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u) du = \ln x$$

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

PROBLÈME

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ à valeurs réelles, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n et pour tout réel t dans $\mathcal{D}_2$, on définit la fonction $g_{(n,t)}$ de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathbb{R}$ par,

$$g_{(n,t)}(x) = x^n f(x, t)$$

$\mathbb{R}^{+*}$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

On utilise, dans tout le problème, la convention $0^0 = 1$.

PARTIE 1 : Étude d'une série géométrique particulière et son application

Dans cette partie, on prend, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, t) = 1$, ainsi on pose pour tout entier naturel n et pour tout $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_n(x) = g_{(n,t)}(x) = x^n$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=1}^n k f_{k-1}(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

- c) i) Justifier que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$.

- ii) En déduire que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Pour tout entier naturel j , on considère la fonction S_j définie par $S_j(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} f_{n-j}(x)$.

- a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction S_j .

- b) Montrer que la fonction S_j est dérivable sur $] -1, 1[$ et que pour tout x dans $] -1, 1[$,

$$S'_j(x) = (j+1)S_{j+1}(x)$$

- c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j et pour tout x dans $] -1, 1[$,

$$S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$$

- d) Montrer que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} n^2 f_{n-1}(x)$ est convergente et que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit p un réel de $]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi géométrique de paramètre p , c'est-à-dire une application X de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

- a) Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ qu'on déterminera en fonction de p .

- b) Montrer que X^2 admet une espérance $\mathbb{E}(X^2)$ qu'on déterminera en fonction de p .
- c) En déduire $\text{Var}(X)$ la valeur de la variance de X en fonction de p .

PARTIE 2 : La résolution d'une équation différentielle

Pour tout entier naturel n , on considère l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$:

$$(\mathcal{E}_n) \quad y'' + y = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Dans cette partie, on prend pour tout (x, t) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$, $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$.

1. Montrer que, pour tout réel strictement positif t , l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$ converge.

On note ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h_n(t) = \int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x)dx$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , h_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $h'_n = -h_{n+1}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel k , h_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $h_n^{(k)}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction h_n , en fonction de h_{n+k} .
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

- a) Vérifier que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t , $I_n(t)$ existe.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)$$

- c) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

- d) En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout réel strictement positif t ,

$$h_n''(t) + h_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

- e) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t)$.

- a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}\mathcal{H}) \quad y'' + y = 0.$$

- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$ admet sur $]0, +\infty[$ une et une seule solution k_n , qui vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_n(t) = 0$, préciser k_n .

PARTIE 3 : Une autre expression de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$

1. Soit k un entier naturel et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge.

On considère la fonction réelle ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $\psi^{(k+1)}(x)$ en fonction de $\varphi^{(k)}(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout couple (t, u) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et pour tout réel s tel que $s > t$,

$$\int_t^s \frac{\sin(x-u)}{x} dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \frac{\cos(s-u)}{s} - \int_t^s \frac{\cos(x-u)}{x^2} dx$$

- b) Montrer que, pour tout couple (t, u) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx$ est convergente et que,

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx = \frac{\cos(t-u)}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-u)}{x^2} dx$$

Ainsi, on considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $\phi(t, u) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-u)}{x} dx$.

On définit aussi la fonction θ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\theta(t) = \phi(t, t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx$.

- c) Montrer que, pour tout entier naturel k , θ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta''(t) + \theta(t) = \frac{1}{t}$.
e) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0$.

3. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} du = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \int_n^{+\infty} \frac{\sin(x-n)}{x} dx.$$

PARTIE 4 :

Application : le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale convergente.

2. a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx$ est convergente et que,

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx$$

- b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente et que,

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

- c) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq t(1 + \ln(1+t) - \ln t)$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$ est convergente et en déduire sa valeur.

5. Montrer que les intégrales $J = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ et $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$ sont convergentes et calculer leurs valeurs respectives.

FIN DE L'ÉPREUVE