

CONCOURS COMMUN 2003

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

EXTRAIT

Problème 1

Partie I

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie $\mathbb{R}$ entier, et que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons C_f la courbe représentative de f .

1. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. – Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?
3. – Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant », « est dominé par » :

$f(t)$ e^t lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ $\frac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.

4. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
5. – Explicitez $f'(t)$.
6. – Dressez le tableau des variations de f .
7. – Explicitez $f''(t)$.
8. – Montrez que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α . Vous ne chercherez pas à calculer α .
9. – Prouvez l'encadrement $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$.
10. – Explicitez le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant C_f ?
11. – Tracez la courbe représentative de f . Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

Remarque : vous pouvez confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. – Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n .

13. – Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

Il résulte donc des questions **12** et **13** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. – Montrez que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

15. – Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n .

16. – Donnez une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie III

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17. – Quel est le sens de variation de F ?

18. – Montrez que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

19. – Prouvez l'encadrement $-1 \leq \ell \leq 0$.

20. – Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F , au point d'abscisse 0.

21. – Explicitez le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons

$$J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

22. – Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x .

23. – Pour $x \geq 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24. – Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25. – En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26. – En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27. – Exploitez les résultats des questions **17**, **19**, **20** et **26** pour donner l'allure de la courbe représentative de F .

FIN

