

Travaillez ce qui est marqué

La solution est en bas

Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

N.B : $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ?

- 1) A_1 est l'ensemble des polynômes réels P vérifiant $P(0)=1$.
- 2) A_2 est l'ensemble des polynômes réels ayant a comme racine.
($a \in \mathbb{R}$ fixé).
- 3) A_3 est l'ensemble des polynômes réels ayant au moins une racine réelle.
- 4) A_4 est l'ensemble des polynômes réels de degré 3.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ?

- 1) A_1 est l'ensemble des suites réelles convergentes vers 1.
- 2) A_2 est l'ensemble des suites réelles négligeables devant n^2
- 3) A_3 est l'ensemble des suites réelles équivalentes à n^2 .
- 4) A_4 est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3$$

- 5) A_5 est l'ensemble des suites réelles arithmétiques.
- 6) A_6 est l'ensemble des suites réelles géométriques.

Exercice 3

F et G deux parties de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$$
$$G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$$

- 1) Montrer que F et G sont deux plans vectoriels.
- 2) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 4

F la partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \int_0^1 P(t)dt = 0\}$$

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que F est un plan vectoriel

Exercice 5

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$

Montrer que :

- 1) F est un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel.
- 2) F est un plan vectoriel.

Exercice 6

Le complémentaire d'un sev reste-il un sev ?

Exercice 7

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; f(x, y) = 2x + y - 1.$
- 2) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; g(x, y) = xy.$
- 3) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; h(x, y, z) = x - y + 2z.$
- 4) $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; k(x, y, z) = x - 2y.$

Exercice 8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto \varphi(P) = (P(a), P(b))$

- 1) Montrer que $\varphi \in L(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
- 2) Supposons dans cette question que $a = -1$ et $b = 3$.
Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$
- 3) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :
 - i) Si $a \neq b$
 - ii) Si $a = b$

Exercice 9

Montrer que les applications φ et ψ sont linéaires ; où :

$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] ; \varphi(P) = P' - (X - 2)P$

$\psi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] ; \psi(P) = P - (X - 2)P'$

Exercice 10

Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ une application. Montrer que $\varphi \in L(E)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(f))(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(f))(x) = \int_0^1 f(t)dt$

Exercice 11

Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \rightarrow E ; f \mapsto \varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$

- 1) Montrer $\varphi \in L(E)$
- 2) Déterminer $\ker(\varphi)$ et vérifier que c'est un plan vectoriel. φ est-il injectif?

Exercice 12

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Delta : E \rightarrow E ; f \mapsto \Delta(f) = f' - f$

- 1) Montrer $\Delta \in L(E)$
- 2)
 - i) Déterminer $\ker(\Delta)$. Δ est-il injectif?
 - ii) $\ker(\Delta)$ est-il une droite vectorielle? un plan vectoriel?
- 3) Déterminer $\ker(\Delta^2)$. Est-il une droite vectorielle? un plan vectoriel?

Exercice 13

$\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto u(z) = iz - i\bar{z}$.

- 1) Montrer que $u \in L(\mathbb{C})$
- 2) Déterminer $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$.
- 3)
 - i) Calculer u^2
 - ii) En déduire que $(I_{\mathbb{C}} + 2u)$ est inversible, et préciser son inverse.

Exercice 14

E un $\mathbb{K}$ esp vectoriel et f et g deux endomorphismes de E .

Supposons que $f \circ g = \text{Id}_E$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et f un endomorphisme de E . Montrer que

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(f)$$

Exercice 16 (*Utile à retenir*)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -esp vectoriels. Soient $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$. Montrer que

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(g)$$

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

Définition : Soient F un sev de E et $f \in L(E)$. F est dit **stable** par f si et seulement si : $(\forall x \in F, f(x) \in F)$

1. Montrer que $\ker(v)$ et $\operatorname{Im}(v)$ sont stables par u .
2. Supposons que $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$.
Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\operatorname{Im}(v) \subset \ker(u)$

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E .

- 1) Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \in \mathbb{K}^*$.
- 2) Montrer que :
 - i) φ est surjective.
 - ii) $E = \operatorname{vect}(a) \oplus \ker(\varphi)$

Exercice 19

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et f un endomorphisme de E .

- 1) Montrer les inclusions suivantes (*toujours vraies et à retenir*) :
 - i) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$
 - ii) $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$
- 2) Montrer les équivalences suivantes :
 - i) $\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\})$
 - ii) $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow E = \operatorname{Im}(f) + \ker(f)$

Exercice 20

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et $f \in L(E)$ vérifiant $f^3 = f^2 + f$.

Montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Indices : Noter que :

$$f \circ (I_E + f - f^2) = 0 \text{ et que } (\forall x \in E, x = (x + f(x) - f^2(x)) + (f^2(x) - f(x)))$$

Exercice 21

Soient E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel et $u \in L(E)$ vérifiant $u^2 - 5u + 6\operatorname{Id}_E = 0$.

- 1) Montrer que u est inversible et préciser son inverse u^{-1} .
- 2) Montrer les deux inclusions suivantes :
 - i) $\operatorname{Im}(u - 3\operatorname{Id}_E) \subset \ker(u - 2\operatorname{Id}_E)$
 - ii) $\operatorname{Im}(u - 2\operatorname{Id}_E) \subset \ker(u - 3\operatorname{Id}_E)$
- 3)
 - i) Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $(u - 3\operatorname{Id}_E)$ et $(u - 2\operatorname{Id}_E)$.
 - ii) En déduire que $E = \operatorname{Im}(u - 3\operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Im}(u - 2\operatorname{Id}_E)$
- 4) Montrer que $E = \ker(u - 3\operatorname{Id}_E) \oplus \ker(u - 2\operatorname{Id}_E)$
- 5) Notons $p = (3\operatorname{Id}_E - u)$, $q = (u - 2\operatorname{Id}_E)$.
 - i) Montrer que u est combinaison linéaire de p et q .
 - ii) Montrer que p et q sont deux projecteurs qui commutent.

- iii) Simplifier p^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- iv) En déduire u^n . Donner-la comme combinaison linéaire de u et Id_E .
($n \in \mathbb{N}$ fixé)
- 6) Application :
Considérons $f \in L(\mathbb{R}^2)$ défini par : $f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$.
 - i) Calculer $(f^2 - 5f + 6Id_{\mathbb{R}^2})$.
 - ii) En déduire $f^n(x, y)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - iii) Considérons les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$(u_0 = 1, v_0 = -1) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Déterminer le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, montrer que F et G sont deux sev de E , puis que $E = F \oplus G$.

- 1) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et
 $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = \dots = x_n\}$

- 2) $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$.

G l'ensemble des fonctions affines.

Rappel : Une fonction affine est de forme $f : x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.

- 3) $E = \mathbb{R}[X]$. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$. $G = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 23

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}.$$

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}.$$

$$G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}.$$

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de E .

Exercice 24

Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$.

Montrer que g est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et trouver sa base et sa direction

Exercice 25

Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{vect}(e_3)$; où $\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (1, 1, 0) \\ e_3 = (1, 2, 3) \end{cases}$

- 1) Montrer que $E = F \oplus G$
- 2) Déterminer $p(x, y, z)$; où p est le projecteur sur F parallèlement à G .
- 3) Déterminer aussi $s(x, y, z)$; où s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 26

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Considérons l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$

- 1) Montrer que $f \in L(\mathbb{C})$.
- 2) Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{C}$.
- 3) Déterminer ses éléments caractéristiques. Vérifier sa bases et sa direction sont des droites vectorielles.

Exercice 27

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Considérons l'application $S : E \rightarrow E$, qui associe à chaque fonction $f \in E$ la fonction $S(f)$ définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}, S(f)(x) = f(1 - x))$

Montrer que S est une symétrie vectorielle de E .

Exercice 28 (*classique*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel.

Soient p et q deux projecteurs de E vérifiant $(pq = qp = 0)$.

Soient α et β deux scalaires fixés. Posons $f = \alpha p + \beta q$.

- 1) Expliciter p^n et q^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire f^n , où $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression en fonction de p et q .

Exercice 29

P désigne l'ensemble des projecteurs de E , où on définit la relation $\preceq$ par :

$$p \preceq q \Leftrightarrow (pq = qp = p)$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur P

Solution détaillée

Ex 1

Il s'agit de montrer si $\mathcal{C}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ ou non.

1) $P \in A_1 \stackrel{\text{d'él}}{\iff} P(0) = 1.$

Soit $\emptyset$ le polyn nul. $\emptyset \notin A_1$ car $\emptyset(0) = 0 \neq 1$.

Donc A_1 n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}[x]$.

2) $P \in A_2 \stackrel{\text{d'él}}{\iff} P(a) = 0.$

i) $0 \in A_2$?

Notons $\emptyset$ le polyn nul. On a $\emptyset \in A_2$ car $\emptyset(a) = 0$.

ii) Soient P et $Q \in A_2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $(\lambda P + Q) \in A_2$.

$$\text{On a } (\lambda P + Q)(a) = \underbrace{\lambda P(a)}_{=0} + \underbrace{Q(a)}_{=0} = 0$$

Donc $(\lambda P + Q) \in A_2$.

$\therefore A_2$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[x]$.

3) $P \in A_3 \stackrel{\text{d'él}}{\iff} (\exists \alpha \in \mathbb{R}, P(\alpha) = 0)$

On a $\begin{cases} x^2 \in A_3 \\ (x+1) \in A_3 \end{cases}$ Mais $\underbrace{x^2 + (x+1)}_{\text{car } \Delta < 0} \notin A_3$

$$4^o) P \in A_4 \stackrel{\text{dél}}{\iff} d^o(P) = 3$$

Notons θ le polynôme nul, on a $\theta \notin A_4$
car $d^o(\theta) = -\infty \neq 3$

D'où A_4 n'est pas un s.e. de $\mathbb{R}[X]$
donc n'est pas un $\mathbb{R}$ -e.v.

Ex 2

Il s'agit aussi de voir si $\mathcal{A}$ sont
des s.e. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou non.

$$1) (U_n) \in A_1 \stackrel{\text{dél}}{\iff} \lim_n U_n = 1$$

La suite nulle $(0)_n \notin A_1$ car $\lim_n 0 = 0 \neq 1$

D'où A_1 n'est pas un s.e. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et donc ce n'est
pas un $\mathbb{R}$ -e.v.

$$2) (U_n) \in A_2 \stackrel{\text{dél}}{\iff} U_n = o(n^2)$$

A_2 est un s.e. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; en effet:

$$i) \underline{(0) \in A_2} \quad \text{car } 0 = o(n^2) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n^2} = 0.$$

ii) Soient (U_n) et $(V_n) \in A_2$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors que $(\lambda \cdot (U_n) + (V_n)) \in A_2$.

$$\text{Or } \begin{pmatrix} U_n = o(n^2) \\ V_n = o(n^2) \end{pmatrix} \implies (\lambda U_n + V_n) = o(n^2)$$

D'où $\lambda(U_n) + (V_n) \in A_2$

$$3) (u_n) \in A_3 \xLeftrightarrow{\text{d\'ef}} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n^2$$

A_3 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; En effet:

$$10) \notin A_3 \text{ car } 0 \not\sim n^2; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{n^2} = 0 \neq 1$$

D'où A_3 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$4) (u_n) \in A_4 \xLeftrightarrow{\text{d\'ef}} (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3)$$

$10) \notin A_4$; En effet:

Notons (θ_n) la suite nulle; $(\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = 0)$

$$(\theta_n) \in A_4 \xLeftrightarrow{\text{d\'ef}} (\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\theta_{n+1}}_{=0} = 5 \underbrace{\theta_n}_{=0} - 3)$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, 0 = -3)$$

ce qui est faux

D'où $(\theta_n) \notin A_4$; Ainsi A_4 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$5) (u_n) \in A_5 \xLeftrightarrow{\text{d\'ef}} (u_n) \text{ est une suite arithmétique} \\ \Leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r)$$

A_5 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; en effet:

i) $10) \in A_5$: Notons (θ_n) la suite nulle.

$$\text{On a: } (\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\theta_{n+1}}_0 - \underbrace{\theta_n}_0 = 0)$$

$$\text{Donc } 10) \in A_5 \text{ (r=0)}$$

ii) Soient (u_n) et $(v_n) \in A_5$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que $(\lambda(u_n) + v_n) \in A_5$:

Cad : $(\exists p \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n) = p)$

Soient r et $r' \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} - u_n = r \\ v_{n+1} - v_n = r' \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} \lambda u_{n+1} - \lambda u_n = \lambda r \\ v_{n+1} - v_n = r' \end{cases} \Rightarrow (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n) = (\lambda r + r')$$

CQFD : $p = \lambda r + r'$ convient

6°) $(u_n) \in A_6 \iff (u_n)$ est une suite géométrique
 $\iff (\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n)$

A_6 n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; En effet :

On a (2^n) et $(3^n) \in A_6$, mais leur somme

$$(2^n + 3^n) \notin A_6.$$

Notons $u_n = 2^n + 3^n$ et on a $(u_n) \notin A_6$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $(u_n) \in A_6$.

Alors $(\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n)$.

Pour $n=0$, on aura $\underbrace{u_1}_5 = q \underbrace{u_0}_2 \Rightarrow q = \frac{5}{2}$

De même, $n=1 \implies q = \frac{13}{5}$ Absurde

Ex 3

1) i) $(U_n) \in F \stackrel{\text{d'f}}{\Leftrightarrow} (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n)$

$(E_c) \quad r^2 = r + 2 \quad ; \quad (-1) \text{ et } 2 \text{ en sont les solutions}$

Alors la forme général de (U_n) est :

$$U_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n \quad ; \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $F = \{ A \cdot (2^n) + B \cdot (-1)^n \mid A, B \in \mathbb{R} \}$

$$\Rightarrow F = \text{Vect}((2^n), (-1)^n)$$

(2^n) et $(-1)^n$ ne sont clairement pas linéaires

D'où F est un plan vectoriel

ii) Pareil, on trouve $G = \text{Vect}((2^n), (3^n))$ etc

2) $(U_n) \in F \cap G \Leftrightarrow (U_n) \in F \text{ et } (U_n) \in G$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \\ U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \\ 0 = 4U_{n+1} - 8U_n \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{soustraction} \\ \text{des deux} \\ \text{équations} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{suite géométrique} \\ \text{de raison } 2 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 \cdot 2^n \end{cases} \left(\begin{array}{l} \text{terme général d'une} \\ \text{série géométrique} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (U_n) \in \text{Vect} \left((2^n)_n, (-1)^n_n \right) \\ (U_n) \in \text{Vect} \left((2^n)_n \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (U_n) \in \text{Vect} \left((2^n)_n \right)$$

Donc $F \cap G = \text{Vect} \left((2^n)_n \right)$
et $(2^n)_n \neq 0$,

Donc $F \cap G$ est une droite vectorielle

Ex 4 $P \in F \Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0$

i) ii) $0 \in F$?

Soit θ le polynôme nul de $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\text{On a } \int_0^1 \underbrace{\theta(t)}_{=0} dt = 0 \Rightarrow \theta \in F$$

iii) Soient P et $Q \in F$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $(\lambda P + Q) \in F$

$$\text{On a } \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t)) dt = \lambda \underbrace{\int_0^1 P(t) dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 Q(t) dt}_{=0} = 0$$

Donc $(\lambda P + Q) \in F$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $P(x) = a + bx + cx^2$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow a \underbrace{\int_0^1 1 dt}_{=1} + b \underbrace{\int_0^1 t dt}_{=1/2} + c \underbrace{\int_0^1 t^2 dt}_{=1/3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(x) = \left(-\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right) + bx + cx^2$$

$$\Leftrightarrow P(x) = b\left(x - \frac{1}{2}\right) + c\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow P \in \text{Vect}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right), \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$$

D'où

$$F = \text{Vect}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right), \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$$

or $\left(x - \frac{1}{2}; x^2 - \frac{1}{3}\right)$ est libre

Alors F est un plan vectoriel



Exercice 5

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

1°) i) $(0, 0, 0, 0) \in F$ (clair)

ii) Soient (x_1, x_2, x_3, x_4) et $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$

Soit $\lambda \in K$.

Alors que $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$

C'est que : $(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3, \lambda x_4 + y_4) \in F$

$$\text{Or on a : } (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) + (\lambda x_4 + y_4) = \\ \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}_{=0} = 0$$

Et on a aussi :

$$(\lambda x_1 + y_1) + 2(\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) + 4(\lambda x_4 + y_4) = \\ \lambda \underbrace{(x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 4y_4)}_{=0} = 0$$

Donc $\left[\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F \right] \subset F$

$$2°) (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 4x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 4x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5x_3 + 2x_4, 4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(-5, 4, 1, 0) + x_4(2, -3, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Vect}((-5, 4, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$$

Donc $F = \text{Vect}((-5, 4, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$

or $(-5, 4, 1, 0), (2, -3, 0, 1)$ libre

Donc F est un plan vectoriel

Exercice 6

Réponse: NON

Soit F un sous de E .

$\overline{F}$ n'est pas un sous de E car $0 \notin \overline{F}$.

Exercice 7

1) $f(0,0) = -1 \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas linéaire

2) $g(2 \cdot (1,1)) \neq 2 \cdot g(1,1)$

(car $g(2 \cdot (1,1)) = g(2,2) = 4$)

$2 \cdot g(1,1) = 2 \times 1 = 2$

3) h linéaire; en effet:

Soient (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $h(\lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z')) = \lambda h(x, y, z) + h(x', y', z')$

On a:

$$\begin{aligned} h(\lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z')) &= h(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x') - (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \\ &= \lambda(x - y + 2z) + (x' - y' + 2z') \\ &= \lambda \cdot h(x, y, z) + h(x', y', z') \end{aligned}$$

4) Paralle à 3°)

On a:

$$\begin{aligned} h(\lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z')) &= h(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') \\ &= \lambda(x - 2y) + (x' - 2y') \\ &= \lambda h(x, y, z) + h(x', y', z') \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\begin{array}{ccc} \varphi: E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

1) Soient f et $g \in E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$

Il s'agit de montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{\varphi(f)(x)} + \underbrace{\int_0^x g(t) dt}_{\varphi(g)(x)} \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

2) Calculée sur 10)

CAF

3^o) Soient f et $g \in E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. M que $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$

Il s'agit de m que: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:

$$\varphi(\lambda f + g)(x) \stackrel{\text{déb}}{=} \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t)) dt$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{\int_0^1 f(t) dt}_{=\varphi(f)(x)} + \underbrace{\int_0^1 g(t) dt}_{=\varphi(g)(x)} = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) \quad \text{CQFD}$$

Exercice 11

$$\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$$

1^o) Soient f et $g \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

M que $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'' - 3(\lambda f + g)' + 2(\lambda f + g) \\ &= (\lambda f'' + g'') - 3(\lambda f' + g') + 2(\lambda f + g) \\ &= \lambda(f'' - 3f' + 2f) + (g'' - 3g' + 2g) \\ &= \lambda \underbrace{\varphi(f)} + \underbrace{\varphi(g)} \\ &= \lambda \varphi(f) + \varphi(g) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

2^o) i) $\text{Ker}(\varphi) = ?$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \varphi(f) = 0\}$$

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow f'' - 3f' + 2f = 0$$

$$(E_c): x^2 - 3x + 2 = 0; \text{ de solutions } \boxed{1} \text{ et } \boxed{2}.$$

La solution générale de cette équ. diff. est:

$$f(x) = A e^x + B e^{2x}; \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

Ainsi $f(x) = x + 2x + \dots + x^n$

ii) $\ker(\varphi) = \text{Vect}(e^x, e^{2x})$

e^x, e^{2x} libre, donc $\ker(\varphi)$ est un plan vectoriel

iii) φ n'est pas injectif car $\ker(\varphi) \neq \{0\}$

Exercice 12

$$\Delta(f) = f' - f$$

1°) Soient f et $g \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\Delta(\lambda f + g) = \lambda \Delta(f) + \Delta(g)$

$$\begin{aligned} \text{On a } \Delta(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' - (\lambda f + g) \\ &= (\lambda f' + g') - (\lambda f + g) \\ &= \lambda(f' - f) + (g' - g) \\ &= \lambda \Delta(f) + \Delta(g) \quad (\text{CQFD}) \end{aligned}$$

2) i) $\ker(\Delta) = ?$

$$\ker(\Delta) = \{f \in E / \overbrace{f' - f}^{\Delta(f)} = 0\}$$

$\ker(\Delta)$ est l'ensemble des solutions de l'équa diff $y' - y = 0$
de solution générale $y(x) = Ce^x$, où $C \in \mathbb{R}$

Ainsi $\ker(\Delta) = \{Ce^x / C \in \mathbb{R}\}$

Δ n'est pas injectif; car $\ker(\Delta) \neq \{0\}$

ii) $\ker(\Delta) = \text{Vect}(e^x)$ et $x \mapsto e^x$ n'est pas nulle
D'où $\ker(\Delta)$ est une droite vectorielle

3) i) $\ker(\Delta^2) = ?$

$$\ker(\Delta^2) = \{f \in E / \Delta^2(f) = 0\}$$

Soit on a: $\Delta^2(f) = \Delta(\Delta(f)) = \Delta(f' - f) = (f' - f)' - (f' - f)$
 $\Delta^2(f) = f'' - 2f' + f$

$$\ker(\Delta^2) = \{ f \in E / f'' - 2f' + f = 0 \}$$

C'est l'ensemble de solutions de l'équa diff $y'' - 2y' + y = 0$

$$(E_c): r^2 - 2r + 1 = 0$$

D'une seule solution 1.

Alors la solution générale est $y(x) = Ae^x + Bxe^x$

$$\ker(\Delta^2) = \{ Ae^x + Bxe^x / A, B \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{ii) } \ker(\Delta^2) = \text{Vect}(e^x, xe^x)$$

et les deux fonctions e^x et xe^x sont linéairement indépendantes,

D'où $\ker(\Delta^2)$ est un plan vectoriel

Exercice 13

$$u(z) = iz - i\bar{z}$$

1) Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $u(\lambda z + z') = \lambda u(z) + u(z')$:

$$\begin{aligned} \text{On a: } u(\lambda z + z') &= i(\lambda z + z') - i(\overline{\lambda z + z'}) \\ &= \lambda iz + iz' - i(\overline{\lambda} \cdot \bar{z} + \bar{z}') \quad \text{car } \overline{\lambda z + z'} = \overline{\lambda} \cdot \bar{z} + \bar{z}' \\ &= \lambda iz + iz' - i\lambda \bar{z} - i\bar{z}' \quad (\overline{\lambda} = \lambda) \\ &= \lambda (iz - i\bar{z}) + (iz' - i\bar{z}') \\ &= \lambda u(z) + u(z') \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

2) i) $\ker(u) = ?$

$$\ker(u) = \{ z \in \mathbb{C} / u(z) = 0 \}$$

$$z \in \ker(u) \Leftrightarrow iz - i\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} ; \text{ D'où } \ker(u) = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \text{Im}(u) &= \{ u(z) / z \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ u(x + yi) / x, y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$$= \{ i(x+yi) - i(x-yi) / x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ -2y / x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ -2y / y \in \mathbb{R} \} = \boxed{\mathbb{R}}$$

$$\text{D'où } \boxed{\text{Im}(u) = \mathbb{R}}$$

3) i) $u^2 = ?$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} u^2(z) &= u(u(z)) = u(iz - i\bar{z}) = i(iz - i\bar{z}) - i(\overline{iz - i\bar{z}}) \\ &= -z + \bar{z} - i(-i\bar{z} + iz) = -z + \bar{z} - \bar{z} + z = 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{u^2 = 0}$$

ii) Très classique

$$I_{\mathbb{C}} = I_{\mathbb{C}}^2 - (2u)^2 \quad (\text{car } (2u)^2 = 4u^2 = 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{\mathbb{C}} = (I_{\mathbb{C}} + 2u)(I_{\mathbb{C}} - 2u)}$$

$$\text{De même on a : } \boxed{I_{\mathbb{C}} = (I_{\mathbb{C}} - 2u)(I_{\mathbb{C}} + 2u)}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} (I_{\mathbb{C}} + 2u) \text{ est inversible} \\ (I_{\mathbb{C}} + 2u)^{-1} = (I_{\mathbb{C}} - 2u) \end{cases}$$

Exercice 14

(On a $f \circ g = \text{Id}_E$)

1°) Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$

Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$. Montrer que $x = 0$.

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{et } x \in \text{Im}(g) \Rightarrow (\exists t \in E, x = g(t))$$

$$\text{D'où } f(x) = f(g(t)) = (f \circ g)(t) = t$$

$$\text{et } f(x) = 0 \Rightarrow t = 0 ; \text{ et donc } x = g(0) = 0 \quad \underline{\text{CQFD}}$$

2°) $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(g)$?

Soit $x \in E$.

Déterminons $x_1 \in \text{Ker}(f)$ et $x_2 \in \text{Im}(g)$

tds que $x = x_1 + x_2$:

Raisonnons par analyse — synthèse :

i) Analyse :

Supposons l'existence de tels x_1 et x_2 .

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow f(x) = \overbrace{f(x_1)}^{=0} + f(x_2) \quad (f \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = f(x_2)}$$

$$\text{et } x_2 \in \text{Im}(g) \Rightarrow (\exists t \in E, x_2 = g(t))$$

$$\text{Alors } f(x) = f(x_2) \text{ devient } f(x) = f(g(t))$$

$$\Rightarrow f(x) = t \quad (\text{car } f \circ g = \text{Id}_E)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = g(t)$$

$$\text{et } g(t) = x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = g(f(x))}$$

$$\text{et } x = x_1 + x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x - g(f(x))}$$

Fin de l'analyse.

ii) Synthèse (ou vérification)

$$\text{Posons } \boxed{x_1 = x - g(f(x)) \text{ et } x_2 = g(f(x))}$$

$$\text{Vérifions : } \begin{cases} a) x_1 \in \text{Ker}(f) \\ b) x_2 \in \text{Im}(g) \\ c) x = x_1 + x_2 \end{cases}$$

→ Pour c) c'est évident

→ Pour b on a $g(f(n)) \in \text{Im}(g)$
 $\Rightarrow \underline{n_2 \in \text{Im}(g)}$

→ Pour a / $n_1 = n - g(f(n)) \in ? \text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } f(n_1) &= f(n) - f(g(f(n))) \quad (\text{car } f \text{ linéaire}) \\ &= f(n) - f(n) \quad (\text{car } f \circ g = \text{Id}_E) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow n_1 \in \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

Exercice 15

$$\begin{aligned} f^2 = 0 &\Leftrightarrow (\forall x \in E, f^2(x) = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, f(f(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \in \text{Ker}(f) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im}(f), y \in \text{Ker}(f) \quad (\text{Im}(f) = \{f(x) / x \in E\}) \\ &\Leftrightarrow \underline{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)} \end{aligned}$$

Exercice 16

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & \searrow & \text{gof} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{gof} = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E, (\text{gof})(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, g(f(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \in \text{Ker}(g) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \text{Im}(f), y \in \text{Ker}(g) \quad (\text{Im}(f) = \{f(x) / x \in E\}) \\ &\Leftrightarrow \underline{\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)} \end{aligned}$$

Exercice 17

$$\underline{uv = vu}$$

1) i) $\text{Ker}(v)$ est stable par u ; En effet :

Soit $x \in \text{Ker}(v)$. $\mathcal{M}$ que $u(x) \in \text{Ker}(v) \stackrel{?}{=}$ 0

$$\text{On a } v(u(x)) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(\underbrace{v(x)}_{=0}) = 0 \quad \text{cQFD}$$

ii) $\text{Im}(v)$ est stable par u ; En effet :

Soit $x \in \text{Im}(v)$. $\forall$ que $u(x) \in \text{Im}(v)$.

$$(\text{On a } x \in \text{Im}(v) \Rightarrow (\exists t \in E, x = v(t)))$$

$$\Rightarrow u(x) = u(v(t))$$

$$\Rightarrow u(x) = v(u(t)) \quad (\text{car } uv = vu)$$

$$\text{or } v(u(t)) \in \text{Im}(v), \text{ alors } \underline{u(x) \in \text{Im}(v)}$$

2°) Supposons que $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$

i) $\forall$ que $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$:

Soit $x \in \text{Im}(u)$. $\forall$ que $x \in \ker(v)$:

$$x \in \text{Im}(u) \Rightarrow (\exists t \in E, x = u(t))$$

D'autre part, on a $t \in E = \ker(u) \oplus \ker(v)$

$$\Rightarrow (\exists (t_1, t_2) \in \ker(u) \times \ker(v), t = t_1 + t_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{u(t)}_{=x} = \underbrace{u(t_1)}_{=0} + u(t_2) = \underline{u(t_2)}$$

$$\Rightarrow x = u(t_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x) = v(u(t_2)) \xrightarrow{uv=vu} u(\underbrace{v(t_2)}_{=0}) = 0}$$

Alors $v(x) = 0$ CQFD

ii) $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$: même démonstration

Exercice 18

$\varphi \in \mathcal{L}(E, K)$ et $\varphi \neq 0$

$$1) \varphi = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in E, \varphi(x) = 0)$$

$$\text{Alors } \varphi \neq 0 \Leftrightarrow (\exists x \in E \text{ tel que } \varphi(x) \neq 0)$$

$$\text{Or } \varphi \neq 0, \text{ alors } (\exists a \in E, \varphi(a) \neq 0)$$

$$\Rightarrow (\exists a \in E, \varphi(a) \in K^*)$$

2) i) $\forall$ que φ est surjective :

Soit $r \in K$. $\forall$ qu'il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = r$

$$\text{On a } r = \frac{r}{\varphi(a)} \cdot \varphi(a) = \varphi\left(\frac{r}{\varphi(a)} \cdot a\right) \quad \text{car } \varphi \text{ linéaire}$$

CQFD

ii) Montrer que $E = \text{Vect}(a) \oplus \text{Ker}(\varphi)$

ii) 1) Montrer que $\text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$:

Soit $x \in \text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(\varphi)$. Montrer que $x = 0$:

$$x \in \text{Vect}(a) \Rightarrow (\exists \lambda \in K, x = \lambda a)$$

$$\text{et } x \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda a) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \underbrace{\varphi(a)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

$$\text{et } x = \lambda a \Rightarrow \underline{x = 0} \quad (\text{Q.F.D.})$$

ii) 2) Soit $x \in E$.

Déterminons $x_1 \in \text{Vect}(a)$ et $x_2 \in \text{Ker}(\varphi)$ tels que : $x = x_1 + x_2$

Analyse : Supposons l'existence de tels x_1, x_2 .

$$x_1 \in \text{Vect}(a) \Rightarrow (\exists \lambda \in K, x_1 = \lambda a)$$

$$\text{et } x = x_1 + x_2 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\lambda a) + \underbrace{\varphi(x_2)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \lambda \varphi(a) \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \quad (\varphi(a) \in K^*)$$

Et donc

$$x_1 = \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \right) \cdot a$$

$$(x = x_1 + x_2) \Rightarrow x_2 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a$$

Fin analyse

Synthèse (càd vérification)

Posons $x_1 = \frac{\ell(x)}{\ell(a)} \cdot a$ et $x_2 = x - \frac{\ell(x)}{\ell(a)} \cdot a$

Vérifions que $\begin{cases} A) x = x_1 + x_2 \\ B) x_1 \in \text{Vect}(a) \\ C) x_2 \in \ker(\ell) \end{cases}$

Pour A) : évidente

Pour B) : $x_1 = \underbrace{\left(\frac{\ell(x)}{\ell(a)} \right)}_{\in K} \cdot a \in \text{Vect}(a)$

Pour C) : $\ell(x_2) \stackrel{?}{=} 0$

On a $\ell(x_2) = \ell(x) - \frac{\ell(x)}{\ell(a)} \cdot \ell(a)$ (car ℓ linéaire)

$$\Rightarrow \underline{\ell(x_2) = 0} \quad (\text{Q.F.D.})$$

Fin partie 1

Partie 2

Exercice 19

10) i) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$?

Soit $x \in \ker(f)$. $\wedge$ que $x \in \ker(f^2)$.

On a: $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$
 $\Rightarrow f(f(x)) = 0$
 $\Rightarrow f^2(x) = 0$
 $\Rightarrow \underline{x \in \ker(f^2)}$

ii) $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$?

Soit $x \in \operatorname{Im}(f^2)$. $\wedge$ que $x \in \operatorname{Im}(f)$.

On a $x \in \operatorname{Im}(f^2) \Rightarrow \exists t \in E, x = f^2(t)$
 $\Rightarrow \underline{x = f(f(t)) \in \operatorname{Im}(f)}$

20) i) $(\Rightarrow)$

Supposons que $\ker(f) = \ker(f^2)$.
Est-ce que $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$?

Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. On a $x = 0$.

$$x \in \text{Im}(f) \Rightarrow (\exists t \in E, x = f(t))$$

$$\text{et } x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\text{D'où } f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \text{Ker}(f^2)$$

$$\Rightarrow t \in \text{Ker}(f) \quad (\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f))$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{=x} = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{x = 0}$$

($\Leftarrow$) Supposons que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

et que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

L'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ est vraie (1/1)

et que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$:

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. On a $x \in \text{Ker}(f)$

$$x \in \text{Ker}(f^2) \Rightarrow f(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in \text{Ker}(f)}$$

$$\text{D'autre part, } f(x) \in \text{Im}(f)$$

$$\text{D'où } f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 0} \text{ (car } \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\})$$

$$\text{(càd } \underline{x \in \text{Ker}(f)} \text{) / Q.F.D.}$$

ii) ($\Rightarrow$)

Supposons que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

Il faut montrer que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$:

Soit $x \in E$. Déterminons $x_1 \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f)$

$$\text{tels que } x = x_1 + x_2$$

On peut procéder par analyse-synthèse.

Je vous propose une démonstration directe.

On a $x \in E$, donc $f(x) \in \text{Im}(f)$
 $\Rightarrow f(x) \in \text{Im}(f^2)$ (car $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$)
 $\Rightarrow (\exists t \in E, f(x) = f^2(t))$

D'où $f(x) - f^2(t) = 0$

$\Rightarrow f(x - f(t)) = 0$

$\Rightarrow (x - f(t)) \in \ker(f)$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} x = (x - f(t)) + f(t) \\ (x - f(t)) \in \ker(f) \\ f(t) \in \text{Im}(f) \end{array} \right.$ fin

($\Leftarrow$) Supposons que $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$

et que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$

L'inclusion $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est vérifiée (1/ii)

Montrons que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$:

Soit $x \in \text{Im}(f)$. Montrons que $x \in \text{Im}(f^2)$:

$x \in \text{Im}(f) \Rightarrow (\exists t \in E, x = f(t))$

Et $\left\{ \begin{array}{l} E = \text{Im}(f) + \ker(f) \\ t \in E \end{array} \right. \Rightarrow (\exists (t_1, t_2) \in \text{Im}(f) \times \ker(f), t = t_1 + t_2)$

D'où $x = f(t) = f(t_1) + \underbrace{f(t_2)}_{=0}$

$\Rightarrow x = f(t_1)$

Or $t_1 \in \text{Im}(f)$, alors $(\exists z \in E, t_1 = f(z))$

Ainsi $x = f^2(z) \Rightarrow x \in \text{Im}(f^2)$ CQFD

Exercice 20

$$\begin{aligned} f^3 &= f^2 + f \\ f \circ (I_E + f - f^2) &= 0 \end{aligned}$$

1) Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$:

Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Montrer que $x = 0$

On a $x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0$

et $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow (\exists t \in E, x = f(t))$

$$\text{Donc } f(x) = f^2(t)$$

$$\Rightarrow f^2(t) = 0 \text{ et aussi } f^3(t) = 0$$

$$f^3 = f^2 + f \Rightarrow \underbrace{f^3(t)}_{=0} = \underbrace{f^2(t)}_{=0} + f(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = 0}$$

Donc $\boxed{x = 0}$ CQFD

2) Montrer que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$:

Soit alors $x \in E$. Déterminons $x_1 \in \text{Ker}(f)$ et $x_2 \in \text{Im}(f)$

tels que : $x = x_1 + x_2$.

$$\text{On a } x = \underbrace{(x + f(x) - f^2(x))}_{\text{notons-le } x_1} + \underbrace{(f^2(x) - f(x))}_{\text{notons-le } x_2}$$

$$\boxed{x_2 = f^2(x) - f(x) = f(f(x) - x) \in \text{Im}(f)}$$

Reste à vérifier que $x_1 \in \text{Ker}(f)$:

$$\text{On a } f(x_1) = f(x + f(x) - f^2(x))$$

$$= f((I_E + f - f^2)(x))$$

$$= \underbrace{(f \circ (I_E + f - f^2))}_{=0}(x)$$

$$\text{Donc } \boxed{f(x_1) = 0} \text{ CQFD}$$

Exercice 21

$$\mu^2 - 5\mu + 6\text{Id}_E = 0$$

1°) On a $\mu^2 - 5\mu + 6\text{Id}_E = 0$

$$\Rightarrow \mu \circ (\mu - 5\text{Id}_E) = -6\text{Id}_E$$

$$\Rightarrow \mu \circ \left(-\frac{1}{6}(\mu - 5\text{Id}_E) \right) = \text{Id}_E$$

$$\begin{cases} \mu \circ g = \text{Id} \\ g \circ \mu = \text{Id} \\ \mu^{-1} = g \end{cases}$$

Et de même, on a $\left(-\frac{1}{6}(\mu - 5\text{Id}_E) \right) \circ \mu = \text{Id}_E$

D'où μ est inversible et $\mu^{-1} = -\frac{1}{6}(\mu - 5\text{Id}_E)$

2°) i) $\text{Im}(\mu - 3\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(\mu - 2\text{Id}_E)$:

Soit $x \in \text{Im}(\mu - 3\text{Id}_E)$. Alors $x \in \text{Ker}(\mu - 2\text{Id}_E)$:

$$x \in \text{Im}(\mu - 3\text{Id}_E) \Rightarrow (\exists t \in E, x = (\mu - 3\text{Id}_E)(t))$$

Et on a : $(\mu - 2\text{Id}_E)(x) = (\mu - 2\text{Id}_E)(\mu - 3\text{Id}_E)(t) = (\mu^2 - 5\mu + 6\text{Id}_E)(t) = 0$

D'où $x \in \text{Ker}(\mu - 2\text{Id}_E)$

ii) Pareille d'il

3°) i) Il s'agit de déterminer α et $\beta \in K$ tels que :

$$\text{Id}_E = \alpha(\mu - 3\text{Id}_E) + \beta(\mu - 2\text{Id}_E)$$

$$\text{Id}_E = \alpha(\mu - 3\text{Id}_E) + \beta(\mu - 2\text{Id}_E) \Leftrightarrow \text{Id}_E = (\alpha + \beta)\mu - (3\alpha + 2\beta)\text{Id}_E$$

Il suffit de prendre α et β vérifiant $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = -1 \end{cases}$

Càd $\alpha = -1$ et $\beta = 1$

Ainsi : $\text{Id}_E = -(\mu - 3\text{Id}_E) + (\mu - 2\text{Id}_E)$

ii) $E = \text{Im}(u - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)$? Deduction

A) $\text{Im}(u - 3\text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - 2\text{Id}_E) = \{0\}$?

Soit $x \in \text{Im}(u - 3\text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)$.

Alors que $x = 0$:

On a $x \in \text{Im}(u - 3\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$

$$\Rightarrow (u - 2\text{Id}_E)(x) = 0; \text{ car } \boxed{u(x) = 2x}$$

et de même, $x \in \text{Im}(u - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - 3\text{Id}_E)$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = 3x}$$

$$\text{D'où } 3x = 2x; \text{ car } \boxed{x = 0}$$

B) $E = \text{Im}(u - 3\text{Id}_E) + \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)$?

Soit $x \in E$. Déterminons $x_1 \in \text{Im}(u - 3\text{Id}_E)$
et $x_2 \in \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$.

$$\text{On a } \text{Id}_E = -(u - 3\text{Id}_E) + (u - 2\text{Id}_E)$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{-(u - 3\text{Id}_E)(x)}_{\in \text{Im}(u - 3\text{Id}_E)} + \underbrace{(u - 2\text{Id}_E)(x)}_{\in \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)}$$

40) i) $\text{Ker}(u - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E) = \{0\}$

Comme dans 3/ii/B)

ii) Soit $x \in E$

D'après 3/ii; il existe $x_1 \in \text{Im}(u - 3\text{Id}_E)$ et
 $x_2 \in \text{Im}(u - 2\text{Id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$.

Et on a $x_1 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$ (car $\text{Im}(u - 3\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$)

De même $x_2 \in \text{Ker}(u - 3\text{Id}_E)$ (car $\text{Im}(u - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(u - 3\text{Id}_E)$)

$\forall x \in E, \exists x_2 \in \text{Ker}(u - 3\text{Id}_E)$ et $x_1 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$
tels que $x = x_2 + x_1$

5°) $p = (3\text{Id}_E - u)$ et $q = (u - 2\text{Id}_E)$.

i) Il s'agit, comme ci-dessus, de déterminer α et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $u = \alpha p + \beta q$.

$$u = \alpha p + \beta q \Leftrightarrow u = \alpha(3\text{Id}_E - u) + \beta(u - 2\text{Id}_E)$$

$$\Leftrightarrow u = (3\alpha - 2\beta)\text{Id}_E + (-\alpha + \beta)u$$

Il suffit de trouver α et β vérifiant
$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

On résout le système, on trouve $\boxed{\alpha = 2 \text{ et } \beta = 3}$

Ainsi: $u = 2p + 3q$

ii) A) p projecteur?

Il s'agit de montrer que

$$p^2 = p$$

On a: $p^2 = (3\text{Id}_E - u)^2$

$$= 9\text{Id}_E - 6u + u^2 \quad (\text{car } u \text{ et } 3\text{Id}_E \text{ commutent})$$

$$= 9\text{Id}_E - 6u + (5u - 6\text{Id}_E)$$

$$= (3\text{Id}_E - u)$$

$$= p$$

B) q projecteur? (Pareil)

C) $pq = qp$?

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

On a: $pq = (3\text{Id}_E - u)(u - 2\text{Id}_E) = -u^2 + 5u - 6\text{Id}_E = 0$

et de même $qp = 0$.

D'où $\boxed{pq = qp} \quad (=0)$

iii) Soit $k \in \mathbb{N}$; $p^k = ?$

$$p^0 = \text{Id}_E$$

$(\forall k \geq 1, p^k = p)$; (facile à démontrer par récurrence)

iv) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u^n = ?$

$$u^n = (2p + 3q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k (3q)^{n-k}$$

(on peut appliquer le binôme de Newton car $(2p)$ et $(3q)$ commutent)

$$u^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} p^k q^{n-k}$$

$$\begin{cases} p^k = p & \text{si } 1 \leq k \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^{n-k} = q & \text{si } 1 \leq n-k \text{ (càd } k \leq n-1) \end{cases}$$

$$u^n = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \underbrace{p^k}_{=p} \underbrace{q^{n-k}}_{=q} \right)}_{=0} + \underbrace{\binom{n}{0} 2^0 3^n p^0 q^{n-0}}_{=3^n q^n} + \underbrace{\binom{n}{n} 2^n 3^0 p^n q^{n-n}}_{=2^n p^n}$$

$$u^n = 2^n p^n + 3^n q^n$$

* Si $n=0$: $u^n = \text{Id}_E$

* Si $n \geq 1$: $u^n = 2^n p + 3^n q$ (car $p^n = p$ et $q^n = q$)

Notons que pour $\underbrace{(u^n)}_I = \underbrace{(2^n p + 3^n q)}_{\Delta p+q=I}$ reste vraie pour $n=0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u^n = 2^n p + 3^n q$ Q

Donnons u^n comme combinaison linéaire de u et Id_E

Remplaçons p par $(3\text{Id}_E - u)$ et q par $(u - 2\text{Id}_E)$ dans Q, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n = (3^n - 2^n)u + (-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)\text{Id}_E$$

6° i) $f^2 - 5f + 6\text{Id}_{\mathbb{R}^2} = 0$?

$f(x,y) = (4x - 2y, x + y)$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f^2(x,y) &= f(f(x,y)) = f(4x - 2y, x + y) \\ &= (4(4x - 2y) - 2(x + y), (4x - 2y) + (x + y)) \end{aligned}$$

$f^2(x,y) = (14x - 10y, 5x - y)$

Donc : $f^2(x,y) - 5f(x,y) + 6(x,y) = \dots = (0,0) \mid \text{CQFD}$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x,y) = ?$

D'après 5) iv), on a $f^n = (3^n - 2^n)f + (-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f^n(x,y) &= (3^n - 2^n)f(x,y) + (-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)(x,y) \\ &= (3^n - 2^n)(4x - 2y, x + y) + (-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)(x,y) \end{aligned}$$

$f^n(x,y) = ((2 \cdot 3^n - 2^n)x - 2(3^n - 2^n)y, (3^n - 2^n)x + (-3^n + 2 \cdot 2^n)y)$

iii) $u_0 = 1; v_0 = -1; \left(\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \right)$

$(\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}) = f(u_n, v_n))$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) = f^n(u_0, v_0))$ (facile à montrer par récurrence)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) = f^n(1, -1)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n, v_n) = (4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n, 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n)$

Et on tire les termes généraux de (u_n) et (v_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$

Exercice 22

i) F sous-esp. de $\mathbb{R}^n$?

$$(x_1, \dots, x_n) \in F \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0$$

$$(*) (0, \dots, 0) \in F \text{ car } 0 + \dots + 0 = 0$$

$(**) Soient (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in F.$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}.$

Montrons que $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in F.$

$$\text{On a } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

$$\text{et } (\lambda x_1 + y_1) + \dots + (\lambda x_n + y_n) = \lambda (x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n) = 0$$

$$\text{Donc } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in F$$

ii) G sous-esp. de $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \in G \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$$

$$(*) (0, \dots, 0) \in G$$

$(**) Soient (x_1, \dots, x_n) \text{ et } (y_1, \dots, y_n) \in G$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}.$

Montrons que $\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \in G$

$$\text{On a } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

$$\text{et } \lambda x_1 + y_1 = \dots = \lambda x_n + y_n$$

$$\text{car } x_1 = \dots = x_n \text{ et } y_1 = \dots = y_n$$

iii) $E = F \oplus G$?

iii) 1) $F \cap G = \{0\}$?

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F \cap G$. Montrons que $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$

$$\text{On a } (x_1, \dots, x_n) \in F \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0$$

$$\text{et on a } (x_1, \dots, x_n) \in G \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n$$

$$\text{Alors } x_1 + \dots + x_n = nx_1$$

$$\text{et } nx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_1 = \dots = x_n \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

iii) 2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Déterminons $(a_1, \dots, a_n) \in F$ et $(b_1, \dots, b_n) \in G$
tels que $(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$

Raisonnons par analyse — synthèse ?

Analyse :

Supposons l'existence de tels $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$.

On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_n) \in F \Leftrightarrow a_1 + \dots + a_n = 0 \\ (b_1, \dots, b_n) \in G \Leftrightarrow b_1 = \dots = b_n \end{cases}$$

$$(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 \\ \vdots \\ x_n = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_n = \overbrace{a_1 + \dots + a_n}^{=0} + nb_1$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\Rightarrow (b_1, \dots, b_n) = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)$$

Et

$$(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$$

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (x_1, \dots, x_n) - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)$$

Synthèse :

Posons :

$$\begin{cases} (b_1, \dots, b_n) = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \\ (a_1, \dots, a_n) = (x_1, \dots, x_n) - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \end{cases}$$

→ $(b_1, \dots, b_n) \in G$; Clair

→ $(a_1, \dots, a_n) \in F$; en effet :

$$\left(x_1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) + \dots + \left(x_n - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) =$$

$$(x_1 + \dots + x_n) - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \times n = 0$$

→ $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (x_1, \dots, x_n)$

3) $E = \mathbb{R}[x]$; $F = \{P \in \mathbb{R}[x] / P(1) = P(2) = 0\}$; $G = \mathbb{R}_1[x]$
 $\langle\langle F \text{ et } G \text{ sont des s.v. de } \mathbb{R}[x] \text{ (facile)} \rangle\rangle$

i) $F \cap G = \{0\}$?

Soit $P \in F \cap G$. M. que $P = 0$.

Onc $\begin{cases} P(1) = P(2) = 0 \\ d^0(P) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^0(P) \leq 1 \\ \text{et} \\ P \text{ possède 2 racines distinctes} \end{cases}$

ii) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. $\Rightarrow \underline{P = 0}$

Déterminons $A \in F$ et $B \in G$ tels que $P = A + B$.

On sent la présence de la div. euclidienne.

Effectuons la division euclidienne de P par $(x-1)(x-2)$.

Alors on a l'existence de Q et $R \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$\begin{cases} P = (x-1)(x-2)Q(x) + R(x) \\ \text{avec } d^0(R) < d^0((x-1)(x-2)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{R \in \mathbb{R}_1[x] = G}$

Posons $A(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$

Alors $A \in F$

On finit $A \in F, R \in G$ et $I = A + R$ Fin

Exercice 23

$$(U_n) \in E \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} - U_{n+1} - 2U_n = 0)$$

$$(U_n) \in F \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} + U_n = 0)$$

$$(U_n) \in G \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 2U_n = 0)$$

1) F est un sous-espace de E ?

i) $F \subseteq E$?

Soit $(U_n) \in F$, il faut que $(U_n) \in E$.

$$\text{On a } (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = -U_n)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+2} = -U_{n+1} \\ U_{n+1} = -U_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{n+2} - U_{n+1} - 2U_n = -U_{n+1} - U_{n+1} - 2U_n \\ = -2U_{n+1} - 2U_n$$

$$= -2 \cdot (-U_n) - 2U_n = \underline{0}$$

ii) Notons $(\theta_n)_n$ la suite nulle. On a $(\theta_n)_n \in F$

$$(\text{car } (\forall n \in \mathbb{N}, \theta_{n+1} + \theta_n = 0))$$

iii) Soient (U_n) et $(V_n) \in F$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut que $(\lambda(U_n) + (V_n)) \in F$:

$$\text{C'est-à-dire que : } (\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda U_{n+1} + V_{n+2}) + (\lambda U_n + V_n) = 0)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\lambda U_{n+1} + V_{n+2}) + (\lambda U_n + V_n) = \lambda \overbrace{(U_{n+1} + U_n)}^{=0} + \overbrace{(V_{n+2} + V_n)}^{=0} = 0$$

C/c : F est un sous-espace de E

2) G est un s.e. de E (Parall à F)

3) $E = F \oplus G$; en effet :

i) $F \cap G = \{0\}$; en effet :

Soit $(U_n) \in F \cap G$. $\forall$ que $(U_n) = 0$.

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+2} + U_n = 0 \\ U_{n+1} - 2U_n = 0 \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, 2U_n = -U_n \right) \\ \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0 \right) \\ \Rightarrow (U_n) = 0 \quad (\text{CQFD})$$

ii) Soit $(U_n) \in E$.

Déterminons $(\alpha_n) \in F$ et $(\beta_n) \in G$ tels que :

$$(U_n) = (\alpha_n) + (\beta_n)$$

Raisonnons par analyse — synthèse :

Analyse :

Supposons l'existence de tels (α_n) et (β_n) :

$$\text{On a : } \begin{cases} (U_n) \in E \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} - U_{n+1} - 2U_n = 0) \quad (\delta) \\ (\alpha_n) \in F \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} + \alpha_n = 0) \\ (\beta_n) \in G \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+1} - 2\beta_n = 0) \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } (\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \alpha_n + \beta_n)$$

(δ) devient :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\alpha_{n+2} + \beta_{n+2}}_{= -\alpha_{n+1}} - \underbrace{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}_{= 2\beta_{n+1}} - 2U_n = 0)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} - 2U_n = 0$$

Exercice 24

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$g(x, y, z) = (x+z, y+z, 0)$$

1) g est un projecteur ?
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$g^2(x, y, z) = g(g(x, y, z))$$
$$= g(x+z, y+z, 0)$$

$$= ((x+z)+0, (y+z)+0, 0)$$

$$= (x+z, y+z, 0) = g(x, y, z)$$

2) ou $g^2 = g$

2) Base de g : Notons-la F .

$$\text{On a } F = \ker(g - \text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow g(x, y, z) - (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+z, y+z, 0) - (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (z, z, -z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow z = 0$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2) ; \text{ ou } e_1 = (1, 0, 0) \text{ et } e_2 = (0, 1, 0)$$

3) Direction de g : Notons-la G .

$$\text{On a } G = \ker(g).$$

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y, y+z, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (-y, y, -y)$$

$$F = \{ (-y, y, -y) / y \in \mathbb{R} \}$$

$$F = \{ y(-1, 1, -1) / y \in \mathbb{R} \}$$

$$F = \text{Vect}((-1, 1, -1))$$

Exercice 25

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2); \text{ où }$$

$$G = \text{Vect}(e_3); \text{ où } e_3 = (1, 2, 3)$$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (1, 1, 0)$$

$$1) E = F \oplus G?$$

$$i) F \cap G = \{0\}?$$

Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. V. que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$:

$$\text{Or } (x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2$$

$$\text{et } (x, y, z) \in G \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \gamma e_3$$

$$\text{Donc } \alpha e_1 + \beta e_2 = \gamma e_3$$

$$\Rightarrow (\alpha, 0, 0) + (\beta, \beta, 0) = (\gamma, 2\gamma, 3\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ \beta = 2\gamma \\ 0 = 3\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} ; \text{ et donc } \underline{(x, y, z) = 0} \quad (0 \cdot e_3 = 0)$$

$$ii) \text{ Soit } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminons $(a, b, c) \in F$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in G$ tels que :

$$(x, y, z) = (a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)$$

Raisonnons par analyse — synthèse :

Analyse :

Supposons l'existence de tels (a, b, c) et (α, β, γ) .

$$(a, b, c) \in F \Rightarrow (\exists m, n \in \mathbb{R}, (a, b, c) = m e_1 + n e_2)$$

$$\text{et } (\alpha, \beta, \gamma) \in G \Rightarrow (\exists s \in \mathbb{R}, (\alpha, \beta, \gamma) = s e_3)$$

$$\text{et on a en plus } (x, y, z) = (a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow m e_1 + n e_2 + s e_3 = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow (m, 0, 0) + (0, n, 0) + (s, 2s, 3s) = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n + s = x \\ n + 2s = y \\ 3s = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = x - y + \frac{2}{3}z \\ n = y - \frac{2}{3}z \\ s = \frac{z}{3} \end{cases}$$

$$\text{D'où } (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}z, z \right)$$

$$(a, b, c) = \left(x - \frac{2}{3}z, y - \frac{2}{3}z, 0 \right)$$

Synthèse :

$$\text{Posons } \begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}z, z \right) \\ (a, b, c) = \left(x - \frac{2}{3}z, y - \frac{2}{3}z, 0 \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow (a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z) \text{ (claire)}$$

$$\rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \in G \text{ (claire)}$$

$$\rightarrow (a, b, c) \in F \text{ (claire)}$$

2) D'après ce qui précède :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z\right)}_{\in G} + \underbrace{\left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right)}_{\in F}$$

i) $p(x, y, z) = \left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right)$

ii) $S(x, y, z) = \left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right) - \left(\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z\right)$

$$S(x, y, z) = \left(x - \frac{2z}{3}, y - \frac{4z}{3}, -z\right)$$

Exercice 26

$$f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$$

1) Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrons que $f(\lambda z + z') = \lambda f(z) + f(z')$.

$$\begin{aligned} f(\lambda z + z') &= \frac{1}{2}(\lambda z + z') + \frac{i}{2}(\lambda z + z') \\ &= \frac{\lambda}{2}z + \frac{z'}{2} + \frac{i}{2}(\lambda z + z') \\ &= \lambda \left(\frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z} \right) + \left(\frac{z'}{2} + \frac{i}{2}\bar{z}' \right) \quad (\bar{\lambda} = \lambda) \\ &= \lambda f(z) + f(z') \end{aligned}$$

2) Montrons que $f^2 = f$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} f^2(z) &= f(f(z)) = f\left(\frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z}\right) + \frac{i}{2}\overline{\left(\frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z}\right)} \\ &= \frac{z}{4} + \frac{i}{4}\bar{z} + \frac{i}{2}\left(\frac{\bar{z}}{2} - \frac{i}{2}z\right) \\ &= \frac{z}{4} + \frac{z}{4} + \frac{i}{4}\bar{z} + \frac{i}{4}\bar{z} \\ &= \frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z} = f(z). \end{aligned}$$

3) i) Base de f : Notons-la F .

$$\text{On a } F = \ker(f - \text{id}_{\mathbb{C}})$$

$$z \in F \Leftrightarrow f(z) - z = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z} - z = 0$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z} = z$$

Notons $z = x + yi$; où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z \in F \Leftrightarrow i(x - yi) = x + yi$$

$$\Leftrightarrow ix + y = x + yi$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow z = x + xi$$

$$\Leftrightarrow z = x(1 + i)$$

$$F = \{x(1+i) / x \in \mathbb{R}\}$$

$F = \text{Vect}(1+i)$; C'est une droite vectorielle.

ii) Direction de f : Notons-la G .

$$G = \ker(f)$$

$$z \in G \Leftrightarrow f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{2} + \frac{i}{2}\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow i\bar{z} = -z$$

Notons $z = x + yi$; où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z \in G \Leftrightarrow i(x - yi) = -x - yi$$

$$\Leftrightarrow ix + y = -x - yi$$

$$\Leftrightarrow x = -y$$

$$\Leftrightarrow z = -y + yi$$

$$\Leftrightarrow z = y(i - 1)$$

$$G = \{y(i-1) / y \in \mathbb{R}\}$$

$G = \text{Vect}(i-1)$; C'est une droite vectorielle.

Exercice 27

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; \quad S: E \rightarrow E$$

$$f \mapsto S(f)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (S(f))(x) = f(1-x)$$

Montrer que $S^2 = \text{id}_E$.

Soit $f \in E$. Montrer que $S^2(f) = f$:

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $(S^2(f))(x) = f(x)$.

On a:

$$(S^2(f))(x) = (S(S(f)))(x)$$

$$= (S(f))(1-x)$$

$$= f(1 - (1-x))$$

$$= f(x) \quad \text{CQFD}$$

Exercice 29

$$p \leq q \Leftrightarrow pq = qp = p$$

10) $\leq$ est réflexive?

Soit $p \in \mathcal{P}$. $p \leq p$ car $p \cdot p = p \cdot p = p$

20) $\leq$ est antisymétrique?

Soient $p, q \in \mathcal{P}$. Supposons que $(p \leq q \text{ et } q \leq p)$. Montrer que $p = q$.

$$\text{On a } \begin{cases} pq = qp = p \\ qp = pq = q \end{cases} \Rightarrow p = q$$

30) $\leq$ est transitive?

Soient $p, q, r \in \mathcal{P}$. Supposons que $(p \leq q \text{ et } q \leq r)$. Montrer que $p \leq r$.

$$\text{On a } \begin{cases} pq = qp = p \\ qr = rq = q \end{cases}, \text{ Montrer que } pr = rp = p$$

$$\text{On a : } \begin{cases} pr = (pq)r = p(qr) = p(q) = p \\ rp = r(qp) = (rq)p = (q)p = p \end{cases}; \text{ Donc } pr = p = rp$$

Fin

Exercice 28 (*classique*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -esp vectoriel.

Soient p et q deux projecteurs de E vérifiant $(pq = qp = 0)$.

Soient α et β deux scalaires fixés. Posons $f = \alpha p + \beta q$.

1) Expliciter p^n et q^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire f^n , où $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression en fonction de p et q .

Solution

1) i) On a $p^0 = I_E$ et $(\forall n \geq 1, p^n = p)$.

Montrons par récurrence que : $(\forall n \geq 1, p^n = p)$

Initialisation :

Par $n=1$, On a $p^1 = p$

Hérédité :

Soit $n \geq 1$.

Supp que $p^n = p$ et M. que $p^{n+1} = p$.

On a $p^{n+1} = p^n \circ p$

$= p \circ p$ (car $p^n = p$)

$= p^2$

$= p$ (car p est un projecteur de E)

Bouclage : $(\forall n \geq 1, p^n = p)$.

ii) On a $q^0 = I_E$ et $(\forall n \geq 1, q^n = q)$. (Même démo)

2) En déduire f^n , où $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression en fonction de p et q .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $f^n = (\alpha p + \beta q)^n$ (on pense au binôme de Newton)

Or $pq = qp (=0)$, donc (αp) et (βq) commutent aussi.

D'où, d'après le binôme de Newton, on a :

$$f^n = (\alpha p + \beta q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha p)^k \cdot (\beta q)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} p^k q^{n-k}$$

$$= \underbrace{\beta^n q^n}_{\substack{\rightarrow q \\ \text{Car } n \geq 1}} + \underbrace{\alpha^n p^n}_{\substack{\rightarrow p \\ \text{Car } n \geq 1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \underbrace{p^k}_{\substack{\rightarrow p \\ \text{Car } k \geq 1}} \underbrace{q^{n-k}}_{\substack{\rightarrow q \\ \text{Car } n-k \geq 1}}$$

$$= \alpha^n p + \beta^n q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \cdot \underbrace{pq}_{\rightarrow 0}$$

C/c :

$$f^n = \alpha^n p + \beta^n q$$



$$p^k = p \text{ si } k \geq 1$$

$$p^0 = I_E$$

$$q^k = q \text{ si } k \geq 1$$

$$q^0 = I_E$$

Fin Exercice 28

Exercise 8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $P \mapsto \varphi(P) = (P(a), P(b))$

- 1) Montrer que $\varphi \in L(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
- 2) Supposons dans cette question que $a = -1$ et $b = 3$.
Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$
- 3) Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ dans chacun des cas suivants :
 - i) Si $a \neq b$
 - ii) Si $a = b$

Solution

3) i) Supp que $a \neq b$.

$\ker(\varphi) = ?$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$P \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow (P(a), P(b)) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow P(a) = P(b) = 0$$

$$\stackrel{!}{\Leftrightarrow} (X-a)(X-b) \mid P \quad \text{car } a \neq b$$

$$\stackrel{!}{\Leftrightarrow} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P = (X-a)(X-b)(\alpha X + \beta) \quad \text{car } d^0(P) \leq 3$$

Donc :

$$\ker(\varphi) = \{ (X-a)(X-b)(\alpha X + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Question

Déterminer une base de l'espace $\ker(\varphi)$

Réponse

On a :

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \{ (X-a)(X-b)(\alpha X + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \alpha X(X-a)(X-b) + \beta(X-a)(X-b) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

$$\ker(\varphi) = \text{vect} \left(X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b) \right)$$

D'où $(X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$ est une famille *génératrice* de $\ker(\varphi)$

$(X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$ est en plus *libre* car famille de polynômes **échelonnée** de degré.

Enfin $(X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b))$ est une base de $\ker(\varphi)$

