Astuce :

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$$

Astuce : $\boxed{(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots) \text{ base de } \mathbb{R}[X].}$

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X(X-1) + \dots$

1 easy to find

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = ?$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = ?$$

$$P(X) = (X+1)(X-2)$$

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X(X-1) \quad \begin{pmatrix} a_0 = ? \\ a_1 = ? \\ a_2 = ? \end{pmatrix}$$

$\underbrace{a_0 = -2}_{\text{Coef Constant}}$; $\underbrace{a_2 = 1}_{\text{Coef dominant}}$; On trouve $a_1 = 0$

Ainsi : $\boxed{(n+1)(n-2) = -2 + n(n-1)}$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = \ldots$$

(voir Suite Sol-détaillée)

Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

$$\sum n\, a_n x^{?}$$

▷ laisse penser à dériver

Cours

$$\forall x \in]-R,R[,\quad \left(\sum_{n=\dots}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=\dots}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

Les Grandes idées

$$(a_n x^n)' \longrightarrow n\, a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x a_n t^n \, dt \longrightarrow \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Soit $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Soit $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n+1} x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$ → Fin ✓

$\times (-1) \cdot x$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n x^{2n} = \frac{-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$(-1)^n x^{2n} = (-x^2)^n$

$x \leftarrow (-x^2)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$