

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2001 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Problème 2

Partie A

A.1. Remarquons que les matrices I , A et A^2 commutent. Si $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= \left(I + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right) \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right) \\ &= I + (s+t)A + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{t^2}{2} + st\right)A^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

(les termes en A^3 , A^4 , ... n'interviennent pas car $A^3 = 0$).

A.2. Il s'agit simplement de faire une récurrence à partir du résultat précédent.

A.3. Remarquons que $E(0) = I$. En appliquant **A.1.** avec $s = -t$, on obtient :

$$E(t)E(-t) = E(0) = I,$$

donc $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t)$.

A.4. Si $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 = 0$, on multiplie par A^2 : $\alpha_0 A^2 = 0$, et on trouve $\alpha_0 = 0$. De même, en multipliant par A , on trouve $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = 0$: la famille (I, A, A^2) est libre.

A.5. Attention! Cette application n'est pas une application linéaire, et il ne suffit pas de calculer son noyau.

$$\begin{aligned} E(s) = E(t) &\iff (t-s)A + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right)A^2 = 0 \\ &\iff t = s \end{aligned}$$

(la dernière équivalence venant du fait que (I, A, A^2) est libre. L'application $t \mapsto E(t)$ est donc injective.

A.6. Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit donc :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

B.1. On calcule $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3y \\ y = y \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $F = \text{vect}(\vec{u})$. On calcule aussi $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &\iff \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases} \end{aligned}$$

On pose $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $G = \text{vect}(\vec{v})$. F et G sont donc deux droites vectorielles, dont les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Elles sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ (qui est de dimension 2).

B.2. Comme $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \vec{v}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B.3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u}, \vec{v})$, et D la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (la matrice diagonale de la question précédente). Alors les formules de changement de base donnent :

$$A = PDP^{-1}.$$

La matrice P est constituée de la façon suivante : les colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs dans les anciens. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de P est 1, et on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

B.4. Calculer la puissance n -ième d'une matrice est très facile... Il suffit de mettre les coefficients sur la diagonale à la puissance n . On obtient donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prouve que $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence sur n . En effet, cette formule est vraie pour $n = 1$, et si elle est valide au rang n , alors $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -2^{n+1} \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie C

C.1 $f(x) = e^x$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et t , à l'ordre n :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{(t-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{x \in [0, t]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Maintenant, la fonction exponentielle est égale à sa dérivée, et $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$. On trouve donc :

$$\left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} e^t.$$

Il suffit, pour conclure, de remarquer que la suite $\left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Et ceci fait partie des résultats classiques!

C.2 D'après la formule de A^n exhibée en **B.4.** :

$$\begin{aligned} a_n(t) &= 3 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} 2^k - 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ b_n(t) &= -6 \sum_{k=0}^n \frac{t^k 2^k}{k!} + 6 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ c_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \\ d_n(t) &= -2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k t^k}{k!} + 3 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

C.3. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les équations précédentes, en ayant remarqué que

$$e^{2t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k t^k}{k!} \right),$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} a(t) &= 3e^{2t} - 2e^t \\ b(t) &= -6e^{2t} + 6e^t \\ c(t) &= e^{2t} - e^t \\ d(t) &= -2e^{2t} + 3e^t. \end{aligned}$$

C.4. Nous avons :

$$E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

C.5 Un petit calcul matriciel montre d'une part que $Q^2 = Q$ et $R^2 = R$, et d'autre part que $QR = RQ = 0$. Les endomorphismes q et r sont donc des projections, et l'image de r est inclus dans le noyau de q (et réciproquement). En outre, l'image de q est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme ces deux vecteurs sont colinéaires, c'est encore la droite vectorielle engendrée par un seul des deux, et on retrouve F . De même, pour l'image de R , on trouve G : q est la projection sur F parallèlement à G , et r est la projection sur G parallèlement à F .

C.6. On a :

$$\begin{aligned} E(s)E(t) &= (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \\ &= e^{2(s+t)}Q^2 + e^{s+t}R^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

Par une récurrence sur n , $(E(t))^n = E(nt)$, et de même qu'on l'a déjà prouvé en partie **A**, $(E(t))^{-1} = E(-t)$ (il faut au préalable remarquer que $Q + R = I$).

Montrons que (Q, R) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, si $\alpha Q + \beta R = 0$, on compose par Q et on obtient $\alpha Q = 0 \implies Q = 0$.

De ce fait, si $E(t) = E(s)$, on a nécessairement $e^{2s} = e^{2t}$ et $e^s = e^t$, et par conséquent $s = t$. L'application $t \mapsto E(t)$ est injective.

FIN

