

Ensembles - Applications - Relations

Exercice 1 :

- 1) Donner la négation de chacune des assertions suivantes :
 - a) $\exists a > 0, \exists b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, na < b$
 - b) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \notin B$
- 2) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - a) f s'annule sur \mathbb{R} .
 - b) f est l'application nulle.

Exercice 2 :

Soient E ensemble et A, B et C trois parties de E .

- 1) Montrer que : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
- 2) Donner un exemple dont $A \cap B = A \cap C$ n'implique pas $B = C$.
- 3) Donner un exemple dont $A \cup B = A \cup C$ n'implique pas $B = C$.
- 4) On définit la *différence symétrique* Δ par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Montrer que
 - a) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 - b) $\overline{A \Delta B} = A \Delta \overline{B} = \overline{A} \Delta B$
 - c) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (\overline{A} \cap C)$
Indice : vous pouvez considérer le complémentaire ...

Exercice 3 :

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Notons χ_A la fonction caractéristique (ou indicatrice) de A .

- 1) Montrer que :
 - a) $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
 - b) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$.
- 2) Déterminer χ_A^2 et $\chi_{\overline{A}}$ en fonction de χ_A .
- 3) Montrer que
 - a) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.
 - b) $\chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B)$.
 - c) Si A et B sont disjoints alors

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

$$d) \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B.$$

- 4) Déduire $\chi_{A\Delta B}$ en fonction de χ_A et χ_B .
 5) Montrer que pour tout A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 4 :

Soient A, B et C trois parties de E . Montrer que :

- 1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- 2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- 3) $\overline{A \setminus B} = B \setminus A$
- 4) $\begin{cases} A \cup C = A \cup B \\ A \cap C = A \cap B \end{cases} \Leftrightarrow B = C$
- 5) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
- 6) $A \cap C = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
- 7) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$
- 8) $\begin{cases} A \setminus B = A \setminus C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \Rightarrow B = C$

Exercice 5 :

Soient E un ensemble et $f \in E^E$ vérifiant $f^3 = f$; càd $f \circ f \circ f = f$.
 Montrer que

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Exercice 6 :

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in F^G$ et $g \in E^F$. Montrer que :

- 1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
- 2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
- 3) ($g \circ f$ injective et f surjective) $\Rightarrow g$ injective
- 4) ($g \circ f$ surjective et g injective) $\Rightarrow f$ surjective

Exercice 7 :

Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

- 1) Montrer que :
 - a) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$
 - b) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$
- 2) Montrer que
 - a) f injective $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A)))$
 - b) f surjective $\Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B)$

3) Montrer que

$$\text{a) } f \text{ injective} \Leftrightarrow (\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'))$$

$$\text{b) } f \text{ bijective} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\overline{A}) = \overline{f(A)})$$

Exercice 8 :

1) Soient E , F , G et H quatres ensembles. Soient $f \in E^F$ et $g \in F^G$ et $h \in G^H$. Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Rightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont aussi bijectives})$$

2) Soient f, g et $h \in E^E$ telles que $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont aussi bijectives.

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre :

1) \mathcal{R} est la relation binaire définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq |y - y'|$$

2) \mathcal{R} est la relation binaire définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y')$$

3) \mathcal{R} est la relation binaire définie sur \mathbb{N}^* par

$$p \mathcal{R} q \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n)$$

Exercice 10 :

Soient E un ensemble et (F, \mathcal{R}) un ensemble ordonné. Soit \prec une relation sur F^E définie par :

$$\forall f, g \in F^E : f \prec g \Leftrightarrow (\forall x \in E) f(x) \mathcal{R} g(x)$$

1) Montrer que la relation \prec est une relation d'ordre sur F^E .

2) On considère l'ensemble $A = \{x \mapsto x + 1, x \mapsto x^2\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Etudier l'existence de son plus grand élément.

Exercice 11 :

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F . Soit \mathcal{R} la relation sur E définie par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

- 1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E .
- 2) Décrire les classes d'équivalences dans les cas suivants :
 - (a) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(x)$.
 - (b) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3$.
- 3) Préciser à quelle condition \mathcal{R} est une relation d'ordre.