

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 12 mai 2006 de 08h00 à 12h00

EXTRAIT

Problème 2 : Algèbre

Dans tout le problème, on fixe un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un nombre réel α .

Notations :

- si p et q sont deux nombres entiers naturels avec $p \leq q$, alors on désigne par $\llbracket p, q \rrbracket$ l'ensemble des nombres entiers naturels k tels que : $p \leq k \leq q$.
- si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, alors on désigne par $a \wedge b$ le PGCD de a et b .
- si $k \in \mathbb{N}$, alors on note $\mathbb{C}_k[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus k à coefficients complexes.

Partie 1 : un résultat d'arithmétique

Remarque : seul le résultat de la question 4 est utilisé dans la suite du problème, à la question 14.

On considère l'ensemble suivant : $A_{n,\alpha} = \{p \in \mathbb{N}^* / \exp(2i\pi np\alpha) = 1\}$

- 1)** Montrer que $A_{n,\alpha}$ n'est pas l'ensemble vide si et seulement si α est un nombre rationnel.
On veillera à montrer séparément les deux implications correspondant à cette équivalence.

Supposons à présent et jusqu'à la fin de cette partie que α soit un nombre rationnel non-nul.

Notons $p(\alpha)$ le plus petit élément de $A_{n,\alpha}$.

Le but est de calculer $p(\alpha) = \min(A_{n,\alpha})$.

- 2)** Justifier l'égalité : $p(\alpha) = p(-\alpha)$.

On pose : $|\alpha| = \frac{r}{s}$ avec $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $r \wedge s = 1$.

On note également : $d = n \wedge s$. On définit les nombres entiers n' et s' par : $n = d.n'$ et $s = d.s'$.

- 3)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $p \in A_{n,\alpha} \Leftrightarrow [\exists t \in \mathbb{N}^*, p.n'.r = s'.t]$

- 4)** Montrer : $p(\alpha) = \frac{s}{n \wedge s}$.

Partie 2 : un ensemble de matrices

On note $\mathbb{J}$ l'ensemble de toutes les matrices du type $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ lorsque λ décrit $\mathbb{C}^*$.

On note également I la matrice diagonale d'ordre 3 dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

- 5)** $\mathbb{J}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Justifier la réponse donnée.

6) On note N la matrice J_0 . Calculer N^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

En déduire que, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe trois suites complexes u, v et w dont on exprimera le terme général à l'aide de λ telles que : $\forall p \in \mathbb{N}, (J_\lambda)^p = u_p \cdot I + v_p \cdot N + w_p \cdot N^2$.

7) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose : $\forall p \in \mathbb{N}, S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (J_\lambda)^k$.

Montrer qu'il existe une suite complexe x que l'on explicitera telle que pour tout nombre entier p supérieur ou égal à 2, on ait :

$$S_p = x_p \cdot I + x_{p-1} \cdot N + \frac{1}{2} x_{p-2} \cdot N^2$$

8) On admettra le résultat suivant : si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} = e^z$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}(p)$ le coefficient de S_p situé sur la ligne i et sur la colonne j (avec $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$).

Déterminer la matrice S dont le coefficient général $a_{i,j}$ est égal à : $a_{i,j} = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_{i,j}(p)$.

Partie 3 : étude d'une application linéaire

On note E l'ensemble de toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : si f et g sont deux telles applications et λ un nombre complexe, alors $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont définies comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

On note d'autre part $[0]$ l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, à savoir $[0] : x \mapsto 0$.

9) Pour $f \in E$, on appelle g l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x + 2\pi)$.

Montrer avec soin que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f) = g$ est un endomorphisme de E .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par E_k le sous-ensemble de E constitué des applications du type : $x \mapsto P(x) \cdot e^{i\alpha x}$ avec $P \in \mathbb{C}_k[X]$.

10)a) Montrer que E_n est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{F} = (f_k)_{0 \leq k \leq n}$ où l'on note :

$$f_0 : x \mapsto e^{i\alpha x}; f_1 : x \mapsto x \cdot e^{i\alpha x}; \dots; f_n : x \mapsto x^n \cdot e^{i\alpha x}$$

Montrer alors que $\mathcal{F}$ est une base de E_n .

10)b) Exprimer simplement E_{n+1} à l'aide de E_n et de la droite vectorielle $\{\lambda \cdot f_{n+1} / \lambda \in \mathbb{C}\}$.

11)a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Ecrire $\varphi(f_k)$ comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.

11)b) En déduire : $\varphi(E_n) \subset E_n$.

12) On désigne par m l'endomorphisme de E_n défini par : pour $f \in E_n$, $m(f) = \varphi(f)$.

On note M la matrice de m relativement à la base $\mathcal{F}$. Montrer que M est une matrice triangulaire supérieure (d'ordre $(n+1)$) que l'on présentera sous forme d'un tableau en faisant seulement figurer les coefficients nuls, les coefficients diagonaux ainsi que ceux situés juste au-dessus de la diagonale.

13) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, le déterminant de l'endomorphisme $(m)^p$.

14) Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, donner le plus petit entier naturel non-nul p tel que $(m)^p$ soit de déterminant égal à 1.

Partie 4 : changement de base

On reprend toutes les notations de la partie 3.

On note id l'application identique de E_n , à savoir : $id : f \mapsto f$.

On considère un nouvel endomorphisme : $\ell = m - (e^{2i\pi\alpha}) \cdot id$

15)a) Vérifier que $\ell(f_0)$ est l'application nulle $[0]$.

15)b) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Montrer que $\ell(f_{k+1})$ est un élément de E_k et que sa composante selon f_k vaut : $2(k+1)\pi e^{2i\pi\alpha}$

15)c) En déduire (par récurrence) : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+1})$.

15)d) Etablir la propriété suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \ell^k(f_k) = (k! (2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}) \cdot f_0$$

15)e) En déduire : $\ell^n(f_n) \neq [0]$ et $\ell^{n+1}(f_n) = [0]$.

16) Montrer que $\mathcal{B} = (\ell^n(f_n), \ell^{n-1}(f_n), \dots, \ell(f_n), f_n)$ est une base de E_n .

17) Déterminer relativement à la base $\mathcal{B}$ la matrice de ℓ .

18) En déduire la matrice de m dans la base $\mathcal{B}$. On note M' cette matrice.

19) On note $\mathbb{J}_{n+1}$ l'ensemble des matrices carrées $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ à coefficients complexes vérifiant les quatre conditions suivantes :

- $a_{1,1}$ est de module 1
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, a_{i,i} = a_{j,j}$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i+1} = 1$
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, [j-i \notin \{0, 1\}] \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$

Montrer que l'application qui à un nombre réel α associe la matrice M' est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{J}_{n+1}$.

FIN

