Exercice : (CNC 2014)(BCPST)

Pour tout réel x, [x] désigne la partie entière de x.
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, T, P), et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \succ 0$.
On pose $Y = [X]$; Y est donc la variable aléatoire dite partie entière de X et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité des événements :

$$(Y = k) = (k \leq X \prec k+1)$$

1) Etude de la var Y.

1)1) Montrer que la var Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

1)2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.

1)3)a) En déduire que la var Y+1 suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

1)3)b) Calculer l'espérance et la variance de Y+1 , puis l'espérance et la variance de Y.

2) Etude de la var Z=X-Y

On considère la var Z=X-Y

2)1) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par la var Z.

2)2) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que

$$\forall x \in [0,1[\,,\ P(Z \leq x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$$

2)3) En déduire l'espérance E(Z) de la var Z.