

CONCOURS COMMUN 2009

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Mardi 19 mai 2009 de 08h00 à 12h00

EXTRAIT

Problème 1.

On rappelle que le nombre $e = \exp(1) \approx 2,72$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ et $\ln(3) \approx 1,10$.

I Etude d'une fonction.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x \exp(-x^2) - 1 = 3xe^{-x^2} - 1$.

- 1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Donner le tableau de variations de f . Préciser les branches infinies de la courbe représentative C_f de f .
- 2 Calculer $f''(x)$. Qu'en déduit-on pour le point de C_f d'abscisse 0 ?
- 3 Donner l'équation de la tangente en 0. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?
- 4 Donner l'allure de la courbe C_f de f .
- 5
 - a) Pourquoi f admet-elle des développements limités en 0 à n'importe quel ordre ?
 - b) Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

II Etude d'une équation différentielle.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle $xy' - (n-2x^2)y = n-2x^2$. Soit H_n l'équation homogène (dite aussi sans second membre) associée à E_n .

- 6 Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.
- 7 En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.
- 8 Donner toutes les fonctions f définies, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

III Etude de deux suites.

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

9 Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

10 Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n , qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

11 Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$?

12

a) Calculer $\exp(-u_n^2) = e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n .

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente. Soit l sa limite.

13 Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall x > 0, g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$.

a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si et seulement si $f_n(t) = 0$.

b) On suppose que : $l \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion ?

c) Soit la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, w_n = u_n - 1$. Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1+w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n .

FIN

