L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Notons Δ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$

$\cap$. que Δ est connexe par arcs.

$\cap$. que Δ est une partie étoilée.

(càd : $\exists A \in \Delta, \forall M \in \Delta, [A, M] \subset \Delta$)

Pour $A = 0$, car 0 est diagonalisable

Soit $M \in \Delta$. $\cap$-que $[0, M] \subset \Delta$.

Soit alors $t \in [0, 1]$. $\cap$-que $(\underbrace{(1-t).0}_{=0} + tM) \in \Delta$

(Or $M \in \Delta \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, PMP^{-1} est diagonale)

$\Rightarrow P(tM)P^{-1}$ diagonale

$\Rightarrow \underline{tM \in \Delta}$ $\square$

L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Notons Δ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$

$\cap$. que Δ est connexe par arcs.

$\cap$. que Δ est une partie étoilée.

(càd : $\exists A \in \Delta, \forall M \in \Delta, [A, M] \subset \Delta$).

Pour $A = 0$, car 0 est nilpotente. $(0^1 = 0)$

Soit $M \in \Delta$. $\cap$-que $[0, M] \subset \Delta$.

Soit alors $t \in [0,1]$. $\cap$-que $(\underbrace{(1-t).0}_{=0} + tM) \in \Delta$

Or $M \in \Delta \Rightarrow (\exists d \geq 1, M^d = 0)$

$\Rightarrow (tM)^d = t^d . M^d = 0$

$\Rightarrow tM \in \Delta$ $\square$