

L'ensemble des matrices nilpotentes de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

L'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

Notons  $\Delta$  l'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$ .

On veut montrer que  $\Delta$  est connexe par arcs.

On va montrer que  $\Delta$  est une partie étoilée.

(c'est-à-dire  $\exists A \in \Delta, \forall M \in \Delta, [A, M] \subset \Delta$ )

Prendre  $A = 0$ , on a  $0$  est diagonalisable.

Soit  $M \in \Delta$ . On veut montrer que  $[0, M] \subset \Delta$ .

Soit  $t \in [0, 1]$ . On veut montrer que  $(1-t) \cdot 0 + tM \in \Delta$ .

Comme  $M \in \Delta \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R}), PMP^{-1}$  est diagonale.

$\Rightarrow P(tM)P^{-1}$  est diagonale.

$\Rightarrow tM \in \Delta$   $\square$

L'ensemble des matrices nilpotentes de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

L'ensemble des matrices diagonalisables de  $M_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

Notons  $\Delta$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $M_n(\mathbb{R})$ .

$\cap$  que  $\Delta$  est connexe par arcs.

$\cap$  que  $\Delta$  est une partie étoilée.

(c'est  $\exists A \in \Delta, \forall M \in \Delta, [A, M] \subset \Delta$ )

Pre  $A=0$ , que  $0$  est nilpotente. ( $0^1=0$ )

Soit  $M \in \Delta$ .  $\cap$  que  $[0, M] \subset \Delta$ .

Soit alors  $t \in [0, 1]$ .  $\cap$  que  $\underbrace{(1-t) \cdot 0 + tM}_{=0} \in \Delta$

Que  $M \in \Delta \Rightarrow (\exists d \geq 1, M^d = 0)$

$$\Rightarrow (tM)^d = t^d \cdot M^d = 0$$

$$\Rightarrow tM \in \Delta \quad \square$$