Espaces vectoriels de dimensions finies

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Exercice 1 [01625] [correction]
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, 1, 1) \text{ et } v = (1, 0, -1)$$

Montrer

$$\text{Vect}(u, v) = \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2 [01626] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2)$ appartienne à $\text{Vect}(x, y)$. Comparer alors $\text{Vect}(x, y)$, $\text{Vect}(x, u)$ et $\text{Vect}(y, u)$.

Famille libre

Exercice 3 [01627] [correction]
Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :
a) (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$
b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$
c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$
d) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 4 [01628] [correction]
On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 5 [01629] [correction]
Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{k.x}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6 [01630] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit libre.
On pose

$$\vec{u} = \vec{y} + \vec{z},\ \vec{v} = \vec{z} + \vec{x} \text{ et } \vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$$

Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

Exercice 7 [01631] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E.
Etablir :
a) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{Vect}(u_1, ..., u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre
b) Si $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice.

Exercice 8 [01632] [correction]
Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
On pose

$$\vec{u} = \alpha_1.\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n.\vec{x}_n \text{ et } \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \vec{y}_i = \vec{x}_i + \vec{u}$$

A quelle condition sur les α_i, la famille $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ est-elle libre ?

Exercice 9 [01633] [correction]
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrer que pour tout $a \in E \backslash Vect(e_1, \ldots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \ldots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 10 [02464] [correction]
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a), x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 11 [01634] [correction]
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos x$$

a) Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de E et sa dimension.

Exercice 12 [01635] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et E l'ensemble des suites réelles p périodiques i.e. l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = u(n)$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.

Exercice 13 [03848] [correction]
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et E l'ensemble des suites complexes p périodiques i.e. l'ensemble des suites (u_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = u(n)$$

a) Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci.
b) Déterminer une base de E formée de suites géométriques.

Exercice 14 [01636] [correction]
Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.
a) Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
b) En déduire $\dim E$.

Obtention de base en dimension finie

Exercice 15 [01637] [correction]
On pose $\vec{e}_1 = (1,1,1)$, $\vec{e}_2 = (1,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,1,1)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 [01638] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose

$$\varepsilon_1 = e_2 + 2e_3,\ \varepsilon_2 = e_3 - e_1 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E

Exercice 17 [01639] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \text{ et } \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice 18 [01640] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \dots + e_i$.
a) Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.
b) Exprimer les composantes dans $\mathcal{B}'$ d'un vecteur en fonction de ses composantes dans $\mathcal{B}$.

Exercice 19 [03724] [correction]
[Lemme d'échange]
Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Sous-espace vectoriel de dimension finie

Exercice 20 [01641] [correction]
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

Exercice 21 [01642] [correction]
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs
$u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0)$ et $y = (1,1,0,-1)$.
Soit $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Hyperplan

Exercice 22 [01643] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2.
Soit H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts.
Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 23 [01644] [correction]
Soient H un hyperplan et F un sous-espace vectoriel non inclus dans H.
Montrer
$$\dim F \cap H = \dim F - 1$$

Exercice 24 [01645] [correction]
Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E.
Montrer que F peut s'écrire comme une intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaire ?

Supplémentarité

Exercice 25 [01646] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :
a) $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$
b) $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$
c) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.

Exercice 26 [01647] [correction]
Soient D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $D \not\subset H$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 27 [01648] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E. A quelle condition H et D sont-ils supplémentaires dans E ?

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 28 [01650] [correction]
Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$:
a) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 1, 1, 1), x_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $x_3 = (1, 0, 1, 1)$.
b) (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 = (1, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, 0), x_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $x_4 = (0, 2, -1, 1)$.

Exercice 29 [01651] [correction]
Dans $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ on considère :
$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice 30 [01652] [correction]
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que pour $p \leqslant n$:
$$\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) \geqslant \text{rg}(x_1, \ldots, x_n) + p - n$$

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 31 [01653] [correction]
Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f(1, 0, 0) = (0, 1),\ f(1, 1, 0) = (1, 0) \text{ et } f(1, 1, 1) = (1, 1)$$
Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer noyau et image de f.

Exercice 32 [01654] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer
$$V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$$

Exercice 33 [01655] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. Montrer que pour tout famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E, on a
$$\text{rg}(f(x_1), \ldots, f(x_p)) = \text{rg}(x_1, \ldots, x_p)$$

Exercice 34 [01656] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.
a) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
b) En déduire que $f^n = 0$.

Exercice 35 [01658] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.
a) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$.
b) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
(indice : on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)
c) Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 36 [01659] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f^2 + f \circ g = \mathrm{Id}$$

Montrer que f et g commutent.

Rang d'une application linéaire

Exercice 37 [01660] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que

$$\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

puis que

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f - g)$$

Exercice 38 [01661] [correction]
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies et
$f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Montrer que $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 39 [03421] [correction]
Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, H)$ des applications linéaires. Montrer

$$\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \mathrm{rg} g + \mathrm{rg}(h \circ g \circ f)$$

Théorème du rang

Exercice 40 [01662] [correction]
Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$
b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$
c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 41 [01663] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence

$$\ker f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f)$$

Exercice 42 [01664] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.
a) Etablir $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ et $\ker f^2 = \ker f$.
b) Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 43 [01665] [correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ supplémentaires dans E ;
(ii) $E = \mathrm{Im} f + \ker f$;
(iii) $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$;
(iv) $\ker f^2 = \ker f$.

Exercice 44 [01666] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g$ bijectif et $g \circ f = \tilde{0}$. Montrer que

$$\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g = \dim E$$

Exercice 45 [03127] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = \tilde{0}$.
Etablir

$$\mathrm{rg} u + \mathrm{rg} u^2 \leqslant n$$

Exercice 46 [01667] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que

$$E = \mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v = \ker u + \ker v$$

Etablir que d'une part, $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Im}v$, d'autre part $\ker u$ et $\ker v$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 47 [01668] [correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f + g = \mathrm{Id} \text{ et } \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = \dim E$$

Montrer que f et g sont des projecteurs complémentaires.

Exercice 48 [01671] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\mathrm{Im}f = \mathrm{ker}f$ si, et seulement si, n est pair.

Exercice 49 [01672] [correction]
[Images et noyaux itérés d'un endomorphisme]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \mathrm{Im}f^p$ et $N_p = \ker f^p$.
a) Montrer que $(I_p)_{p\geqslant 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p\geqslant 0}$ est croissante.
b) Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
c) Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés.
Montrer que

$$\forall s \geqslant r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r$$

d) Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 50 [01674] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
On considère $h : H \to E$ la restriction de $g \circ f$ à H.

a) Montrer que

$$\ker(g \circ f) = \ker h + \ker f$$

b) Observer que

$$\mathrm{rg}h \geqslant \mathrm{rg}f - \dim\ker g$$

c) En déduire que

$$\dim\ker(g \circ f) \leqslant \dim\ker g + \dim\ker f$$

Forme linéaire en dimension finie

Exercice 51 [01675] [correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et φ une forme linéaire non nulle sur E.
Montrer que pour tout $u \in E \backslash \ker\varphi$, $\ker\varphi$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 52 [01676] [correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = 0$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans $E^\star$.

Exercice 53 [01678] [correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}$$

Soient $u = (1, 2, 1)$ et $v = (-1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ forme une base de H.

Exercice 54 [01679] [correction]
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\star$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a $f(x) = \varphi(x).a$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On peut écrire
$$\{(2\alpha,\alpha+\beta,2\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(x,y)$$
avec $x=(2,1,0)$ et $y=(0,1,2)$.
On a $u=\frac{1}{2}(x+y)$ et $v=\frac{1}{2}(x-y)$ donc $u,v\in\mathrm{Vect}(x,y)$ puis $\mathrm{Vect}(u,v)\subset\mathrm{Vect}(x,y)$.
Aussi $x=u+v$ et $y=u-v$ donc $x,y\in\mathrm{Vect}(u,v)$ puis $\mathrm{Vect}(x,y)\subset\mathrm{Vect}(u,v)$.
Par double inclusion l'égalité.

Exercice 2 : [énoncé]
On a
$$u=\lambda x+\mu y\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\-\lambda+\mu=1\\\lambda+a\mu=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\\mu=2\\a=1/2\end{cases}$$
Ainsi
$$u\in\mathrm{Vect}(x,y)\Leftrightarrow a=1/2$$
et alors $u=x+2y$.
$x,u\in\mathrm{Vect}(x,y)$ donc $\mathrm{Vect}(x,u)\subset\mathrm{Vect}(x,y)$.
$x,y\in\mathrm{Vect}(y,u)$ donc $\mathrm{Vect}(x,y)\subset\mathrm{Vect}(y,u)$.
$y,u\in\mathrm{Vect}(x,u)$ donc $\mathrm{Vect}(y,u)\subset\mathrm{Vect}(x,u)$.
Finalement les trois espaces sont égaux.

Exercice 3 : [énoncé]
a) oui b) oui c) non $x_3=x_2-x_1$ d) non $x_3=-x_1$.

Exercice 4 : [énoncé]
Supposons
$$af_1+bf_2+cf_3+df_4=0$$
On a
$$\forall x\in[0,2\pi]\,,\,(a+bx)\cos x+(c+dx)\sin x=0$$
Pour $x=0$ et $x=\pi$ on obtient le système :
$$\begin{cases}a=0\\a+b\pi=0\end{cases}$$
d'où $a=b=0$.
Pour $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{3\pi}{2}$ on obtient le système
$$\begin{cases}c+d\pi/2=0\\c+3d\pi/2=0\end{cases}$$
d'où $c=d=0$.
Finalement la famille étudiée est libre.

Exercice 5 : [énoncé]
Supposons $\lambda_0f_0+\cdots+\lambda_nf_n=0$.
On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_0+\lambda_1\mathrm{e}^x+\cdots+\lambda_n\mathrm{e}^{nx}=0$$
Quand $x\to-\infty$, en passant la relation ci-dessus à la limite, on obtient $\lambda_0=0$.
On a alors
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_1\mathrm{e}^x+\cdots+\lambda_n\mathrm{e}^{nx}=0$$
donc
$$\lambda_1+\lambda_2\mathrm{e}^x+\cdots+\lambda_n\mathrm{e}^{(n-1)x}=0$$
En reprenant la démarche ci-dessus, on obtient $\lambda_1=0$, puis de même $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$. On a
$$(\beta+\gamma)\vec{x}+(\alpha+\gamma)\vec{y}+(\beta+\alpha)\vec{z}=\vec{0}$$
Or la famille $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est libre donc
$$\begin{cases}\beta+\gamma=0\\\alpha+\gamma=0\\\alpha+\beta=0\end{cases}$$
Après résolution $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Finalement, la famille étudiée est libre.

Exercice 7 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0_E$.
Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors $u_{n+1} = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$ avec $\mu_i = -\lambda_i/\lambda_{n+1}$. Ceci est exclu car $u_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$.
Il reste $\lambda_{n+1} = 0$ et on a alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$ donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
b) Soit $x \in E$. On peut écrire $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}$ car $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ génératrice.
Or on peut écrire $u_{n+1} = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$ car $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on a donc $x = \nu_1 u_1 + \cdots + \nu_n u_n$ avec $\nu_i = \lambda_i + \lambda_{n+1}\mu_i$. Ainsi $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
Finalement $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice.

Exercice 8 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1 \vec{y}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{y}_n = \vec{0}$. On a
$(\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)).\vec{x}_1 + \cdots + (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)).\vec{x}_n = \vec{0}$ donc

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)) = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)) = 0 \end{cases}$$

En sommant les équations on obtient :

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(1 + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)) = 0$$

Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq -1$ alors $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ puis par le système $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -1$ alors $\alpha_1 \vec{y}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{y}_n = \vec{o}$.
Finalement $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ est libre si, et seulement si, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq -1$.

Exercice 9 : [énoncé]
Supposons

$$\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E$$

On a $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p).a$.
Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \neq 0$ alors

$$a = -\frac{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$$

C'est exclu.
Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$ alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$ puis $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Exercice 10 : [énoncé]
Non car ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux suivantes

$$x \mapsto \sin x \text{ et } x \mapsto \cos x$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_0(x) = \cos x$, $f_1(x) = x\cos x$ et $f_2(x) = x^2 \cos x$.
E est donc un sous-espace vectoriel et (f_0, f_1, f_2) en est une famille génératrice.
b) Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\cos x = 0$.
Pour $x = 2n\pi$, on obtient $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $\gamma \neq 0$ alors $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \to \pm\infty$. C'est exclu. Nécessairement $\gamma = 0$.
On a alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, puis $n = 1$ on obtient successivement $\alpha = \beta = 0$.
Finalement (f_0, f_1, f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 3$

Exercice 12 : [énoncé]
On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, \ldots, e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$$

La famille $(e_0, \ldots, e_{p-1})$ est donc une base de E et par suite $\dim E = p$.

Exercice 13 : [énoncé]
a) On vérifie aisément que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on note e_i la suite définie par

$$e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que les suites $e_0, \ldots, e_{p-1}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$$

La famille $(e_0,\dots,e_{p-1})$ est donc une base de E et par suite $\dim E = p$.
b) Soit $q\in\mathbb{C}^\star$. La suite géométrique (q^n) est élément de E si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{N}, q^{n+p} = q^n$$

ce qui équivaut à affirmer que q est une racine p-ième de l'unité.
Considérons alors les suites $u_1,\dots,u_p$ avec

$$u_j(n) = \left(\mathrm{e}^{2i\pi j/p}\right)^n = \omega_j^n \text{ avec } \omega_j = \mathrm{e}^{2i\pi j/p}$$

Les suites $u_1,\dots,u_p$ sont éléments de E. Pour affirmer qu'elles constituent une base de E, il suffit de vérifier qu'elles forment une famille libre. Supposons

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j u_j = 0$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on a l'équation

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j\omega_j^n = 0$$

Soit $k\in\{1,\dots,p\}$ fixé. En multipliant l'équation précédente par ω_k^{-n} et en sommant les équations obtenues pour $n=0,1,\dots,p-1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{j=1}^p \lambda_j\left(\omega_j\omega_k^{-1}\right)^n = 0$$

En permutant les deux sommes

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j\sum_{n=0}^{p-1}\left(\omega_j\omega_k^{-1}\right)^n = 0$$

Le nombre $\omega_j\omega_k^{-1}$ est une racine p-ième de l'unité et, lorsque $j\neq k$, celle-ci diffère de 1, de sorte que

$$\sum_{n=0}^{p-1}\left(\omega_j\omega_k^{-1}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ p & \text{si } j = k\end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j=1}^p \lambda_p p\delta_{j,k} = 0$$

et donc $\lambda_k = 0$. Ceci valant pour tout $k\in\{1,\dots,p\}$, on peut conclure à la liberté de la famille $(u_1,\dots,u_p)$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. On a $\forall x\in\mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n = 0$.
Si $\lambda_n\neq 0$ alors $\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ c'est absurde.
Nécessairement $\lambda_n = 0$ puis de même $\lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_0 = 0$.
Finalement $(f_0,\dots,f_n)$ est libre.
b) Par suite $n+1\leqslant \dim E$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $\dim E = +\infty$

Exercice 15 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$.
On a

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $3 = \dim\mathbb{R}^3$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 = 0_E$. On a

$$(\lambda_3 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)e_2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0_E$$

Or (e_1,e_2,e_3) est libre donc

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille ε est une famille libre formée de $3 = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.

Exercice 17 : [énoncé]
Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires donc forme une famille libre.
Pour $\varepsilon_3 = e_2$ (ou encore par exemple $\varepsilon_3 = e_3$ mais surtout pas $\varepsilon_3 = e_1$), on montre que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est libre et donc une base de E.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Supposons $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n=0_E$. On a $(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0_E$ donc

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=0\\ \lambda_2+\cdots+\lambda_n=0\\ \vdots\\ \lambda_n=0\end{cases}$$

qui donne $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.
La famille ε est une famille libre formée de $n=\dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.
b) $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n\varepsilon_n=\mu_1e_1+\cdots+\mu_ne_n$ donne

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mu_1\\ \lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mu_2\\ \vdots\\ \lambda_n=\mu_n\end{cases}$$

puis

$$\begin{cases}\lambda_1=\mu_1-\mu_2\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}=\mu_{n-1}-\mu_n\\ \lambda_n=\mu_n\end{cases}$$

Exercice 19 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons la famille $(e_1,\ldots,e_{n-1},e'_j)$ liée pour chaque $j\in\{1,\ldots,n\}$.
Puisque la sous-famille $(e_1,\ldots,e_{n-1})$ est libre, le vecteur e'_j est combinaison linéaire des vecteurs $e_1,\ldots,e_{n-1}$ et donc

$$\forall j\in\{1,\ldots,n\}\,,e'_j\in\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$$

Cela entraîne

$$e_n\in E=\operatorname{Vect}(e'_1,\ldots,e'_n)\subset\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_{n-1})$$

ce qui est absurde.

Exercice 20 : [énoncé]
On sait

$$\dim F+G=\dim F+\dim G-\dim F\cap G$$

donc

$$\dim F\cap G=\dim F+\dim G-\dim F+G$$

or $\dim F+G\leqslant\dim E=n$ donc $\dim F\cap G>0$.
Par suite $F\cap G$ possède un vecteur non nul.

Exercice 21 : [énoncé]
(u,v,w) forme une famille libre donc une base de F. Ainsi $\dim F=3$.
(x,y) forme une famille libre donc une base de G. Ainsi $\dim G=2$.
(u,v,w,x) forme une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi $F+G=E$ et $\dim F+G=4$.
Enfin

$$\dim F\cap G=\dim F+\dim G-\dim F+G=1$$

Exercice 22 : [énoncé]
H_1+H_2 est un sous-espace vectoriel de E qui contient H_1 donc $\dim H_1+H_2=n-1$ ou n.
Si $\dim H_1+H_2=n-1$ alors par inclusion et égalité des dimensions :
$H_2=H_1+H_2=H_1$.
C'est exclu, il reste $\dim H_1+H_2=n$ et alors
$\dim H_1\cap H_2=\dim H_1+\dim H_2-\dim H_1+H_2=n-2$.

Exercice 23 : [énoncé]
On a $F\subset F+H\subset E$ et $F\not\subset H$ donc $F+H=E$ d'où $\dim F\cap H=\dim F-1$ via le théorème des quatre dimensions.

Exercice 24 : [énoncé]
Posons $n=\dim E$ et $p=\dim F$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F que l'on complète en $(e_1,\ldots,e_n)$ base de E. Posons $H_i=\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n)$ où $\hat{e}_i$ signifie que le terme est absent de la liste. Par double inclusion
$F=H_{p+1}\cap\ldots\cap H_n$.
On ne peut pas avoir moins d'hyperplans dans cette intersection puisque par récurrence on peut montrer que l'intersection de q hyperplans est de dimension supérieure à $n-q$.

Exercice 25 : [énoncé]
a) (u,v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u,v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D=\text{Vect}(w)$ avec $w=(1,0,0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) $w=u+v$ donc $F=\text{Vect}(u,v)$. (u,v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u,v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D=\text{Vect}(t)$ avec $t=(1,0,0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u,v,t) est une base de $\mathbb{R}^3$.
c) $F=\{(2y-3z,y,z)/y,z\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}(u,v)$ avec $u=(2,1,0)$ et $v=(-3,0,1)$.
(u,v) est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) et (u,v) génératrice de F. C'est donc une base de F.
$D=\text{Vect}(w)$ avec $w=(1,0,0)$ est un supplémentaire de F car la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 26 : [énoncé]
$D+H$ est un sous-espace vectoriel de E contenant H donc $\dim D+H=n-1$ ou n.
Si $\dim D+H=n-1$ alors par inclusion et égalité des dimensions $D+H=H$ or $D\subset D+H$ et $D\not\subset H$, ceci est donc exclu. Il reste $\dim D+H=n$ d'où $D+H=E$.
Puisque $D+H=E$ et $\dim D+\dim H=\dim E$, D et H sont supplémentaires dans E.

Exercice 27 : [énoncé]
Si $D\subset H$ alors H et D ne sont pas supplémentaires car $H\cap D=D\neq\{0_E\}$.
Supposons $D\not\subset H$.
Soit $x\in D\cap H$. Si $x\neq 0_E$ alors $D=\text{Vect}(x)\subset H$ ce qui est exclu.
Nécessairement $D\cap H=\{0_E\}$.
De plus $\dim H+\dim D=\dim E$ donc $H\oplus D=E$.

Exercice 28 : [énoncé]
a) (x_1,x_2,x_3) est libre donc $\text{rg}(x_1,x_2,x_3)=3$.
b) Comme $x_3=x_1+x_2$ et $x_4=x_1-x_2$, on a $\text{Vect}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\text{Vect}(x_1,x_2)$.
Comme (x_1,x_2) est libre, on a $\text{rg}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\text{rg}(x_1,x_2)=2$.

Exercice 29 : [énoncé]
On a
$$f_1(x)=\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=f_3(x)+f_4(x), f_2(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=f_3(x)-f_4(x)$$
donc
$$\text{rg}(f_1,f_2,f_3,f_4)=\text{rg}(f_3,f_4)=2$$
car (f_3,f_4) est libre.

Exercice 30 : [énoncé]
$\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)=\text{Vect}(x_1,\dots,x_p)+\text{Vect}(x_{p+1},\dots,x_n)$.
donc $\text{rg}(x_1,\dots,x_n)\leqslant\text{rg}(x_1,\dots,x_p)+\text{rg}(x_{p+1},\dots,x_n)\leqslant\text{rg}(x_1,\dots,x_p)+n-p$.

Exercice 31 : [énoncé]
Posons $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(1,1,0)$ et $e_3=(1,1,1)$.
Il est immédiat d'observer que (e_1,e_2,e_3) est une base de E.
Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, par suite f existe et est unique.
$(x,y,z)=(x-y)e_1+(y-z)e_2+ze_3$ donc
$f(x,y,z)=(x-y)f(e_1)+(y-z)f(e_2)+zf(e_3)=(y,x-y+z)$.
$\ker f=\text{Vect}u$ avec $u=(1,0,-1)$.
Par le théorème du rang $\dim\text{Im}f=2$ et donc $\text{Im}f=\mathbb{R}^2$.

Exercice 32 : [énoncé]
Si $V=\{0\}$: ok
Sinon, soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de V.
$f(V)=f(\text{Vect}(e_1,\dots,e_p))=\text{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p))$.
Donc $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension inférieure à p. Or $V\subset f(V)$ donc $\dim f(V)\geqslant p$ et par suite $\dim f(V)=p$. Par inclusion et égalité des dimensions : $f(V)=V$.

Exercice 33 : [énoncé]
Par définition
$$\text{rg}(f(x_1),\dots,f(x_p))=\dim\text{Vect}(f(x_1),\dots,f(x_p))=\dim f(\text{Vect}(x_1,\dots,x_p))$$
or f est injective donc
$$\dim f(\text{Vect}(x_1,\dots,x_p))=\dim\text{Vect}(x_1,\dots,x_p)$$

et ainsi

$$\operatorname{rg}(f(x_1),\dots,f(x_p)) = \operatorname{rg}(x_1,\dots,x_p)$$

Exercice 34 : [énoncé]
a) Il existe $x \notin \ker f^{p-1}$ car $f^{p-1} \neq 0$ par définition de p.
Supposons

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = \vec{0}$$

En composant par f^{p-1} la relation ci-dessus, on obtient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x) = \vec{0}$$

car

$$f^p(x) = \ldots = f^{2p-2}(x) = \vec{0}$$

Il s'ensuit $\lambda_0 = 0$.
En composant par $f^{p-2},\dots,f^0$ la relation initiale, on obtient successivement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.
La famille $(x, f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est donc libre.
b) Comme cette famille est libre et composée de p vecteurs en dimension n on a $p \leqslant n$.
Puisque $f^p = 0$, $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Si $x = 0_E$ alors n'importe quel λ_x convient..
Sinon, la famille $(x, f(x))$ étant liée, il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0_E$.
Si $\mu = 0$ alors $\lambda x = 0_E$, or $x \neq 0_E$ donc $\lambda = 0$ ce qui est exclu car $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.
Il reste $\mu \neq 0$ et on peut alors écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x = -\lambda/\mu$.
b) Cas (x, y) liée : on peut écrire $y = \mu x$ avec $\mu \neq 0$ (car $x, y \neq 0_E$).
D'une part $f(y) = \lambda_y y = \mu\lambda_y x$. D'autre part $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu\lambda_x x$.
Sachant $\mu \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on conclut : $\lambda_x = \lambda_y$.
Cas (x, y) libre :
D'une part $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$, d'autre part $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Ainsi $\lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$.
Par liberté de la famille (x, y), on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
c) L'application $x \mapsto \lambda_x$ est constante sur $E\setminus\{0_E\}$. Notons λ la valeur de cette constante.
On a $\forall x \in E\setminus\{0_E\}, f(x) = \lambda x$, de plus cette identité vaut aussi pour $x = 0_E$ et donc $f = \lambda \mathrm{Id}$.

Exercice 36 : [énoncé]
On a

$$f \circ (f + g) = \mathrm{Id}$$

donc, par le théorème d'isomorphisme, $f + g$ est inversible et

$$f + g = f^{-1}$$

On en déduit $(f + g) \circ f = \mathrm{Id}$ qui donne

$$f \circ g = g \circ f$$

Exercice 37 : [énoncé]
On a $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ donc

$$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im} g - \dim \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Aussi

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f - g + g) \leqslant \operatorname{rg}(f - g) + \operatorname{rg}(g)$$

donc

$$\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f - g)$$

On conclut par symétrie sachant $\operatorname{rg}(f - g) = \operatorname{rg}(g - f)$.

Exercice 38 : [énoncé]
Le rang d'une application linéaire composée est inférieur aux rangs des applications linéaires qui la compose.
D'une part $\operatorname{rg}(f \circ g), \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)$
D'autre part $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f \circ g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f), \operatorname{rg}(f \circ g), \operatorname{rg}(g)$ et $\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f \circ g) \leqslant \operatorname{rg}(f)$
Ces comparaisons permettent de conclure.

Exercice 39 : [énoncé]
Pour φ, ψ applications linéaires composables

$$\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \dim \mathrm{Im}\psi_{\restriction \mathrm{Im}\varphi} = \operatorname{rg}\varphi - \dim\left(\mathrm{Im}\varphi \cap \ker\psi\right)$$

Ainsi

$$\operatorname{rg}(h \circ g \circ f) = \operatorname{rg}(g \circ f) - \dim\left(\mathrm{Im}(g \circ f) \cap \ker h\right)$$

et

$$\operatorname{rg}(h \circ g) = \operatorname{rg} g - \dim\left(\mathrm{Im} g \cap \ker h\right)$$

Puisque
$$\mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im} g$$
on a
$$\dim\left(\mathrm{Im}(g\circ f)\cap \ker h\right)\leqslant \dim\left(\mathrm{Im} g\cap \ker h\right)$$
ce qui fournit l'inégalité demandée.

Exercice 40 : [énoncé]
a) $u=(x,y,z)\in\ker f\Leftrightarrow x=y=z$. $u=(1,1,1)$ forme une base de $\ker f$.
Par le théorème du rang $\mathrm{rg} f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\ker f=2$.
Soit $v=f(1,0,0)=(0,-1,1)$ et $\vec{w}=f(0,1,0)=(1,0,-1)$ vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im} f$.
$(v,\vec{w})$ est une famille libre formée de $2=\dim\mathrm{Im} f$ vecteurs de $\mathrm{Im} f$, c'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.
b) $\ker f=\{(x,y,-2x-y,-x-y)/\ x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(u,v)$ avec $u=(1,0,-2,-1)$ et $v=(0,1,-1,-1)$.
(u,v) est une famille libre, elle forme donc une base de $\ker f$, par suite $\dim\ker f=2$.
Par le théorème du rang : $\mathrm{rg}\, f=\dim\mathbb{R}^4-\dim\ker f=2$.
$\vec{a}=f(1,0,0,0)=(2,1,1)\in\mathrm{Im} f$ et $\vec{b}=f(0,1,0,0)=(1,1,0)\in\mathrm{Im} f$.
(a,b) forme une famille libre formée de $2=\dim\mathrm{Im} f$ vecteurs de $\mathrm{Im} f$, c'est donc une base de $\mathrm{Im} f$.
c) $\ker f=\{z=a+i.b/a,b\in\mathbb{R},a+b=0\}$.
Soit $z_1=1-i$, on observe que $\ker f=\mathrm{Vect}(z_1)$, donc (z_1) forme une base de $\ker f$ et $\dim\ker f=1$.
Par le théorème du rang : $\mathrm{rg}\, f=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}-\dim\ker f=1$.
$z_2=f(1)=1+i\in\mathrm{Im} f$, donc (z_2) forme une base de $\mathrm{Im} f$ car $\mathrm{rg}\, f=1$.

Exercice 41 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Si $\ker f=\mathrm{Im} f$ alors $f^2=0$ car $\mathrm{Im} f\subset\ker f$.
De plus, par le théorème du rang : $\dim E=\mathrm{rg} f+\dim\ker f=2\mathrm{rg} f$ car $\dim\ker f=\dim\mathrm{Im} f$.
($\Leftarrow$) Si $f^2=0$ et $n=2\mathrm{rg}(f)$ alors d'une part $\mathrm{Im} f\subset\ker f$ et d'autre part, par le théorème du rang :
$2\mathrm{rg} f=\mathrm{rg} f+\dim\ker f$ donc $\dim\mathrm{Im} f=\dim\ker f$. Par inclusion et égalité des dimensions $\mathrm{Im} f=\ker f$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) $\mathrm{rg}(f^2)=\mathrm{rg}(f)\Rightarrow\mathrm{Im} f^2=\mathrm{Im} f$ car on sait $\mathrm{Im} f^2\subset\mathrm{Im} f$.
Par le théorème du rang $\ker f^2=\ker f$ car on sait $\ker f\subset\ker f^2$.
b) Soit $x\in\ker f\cap\mathrm{Im} f$.
On peut écrire $x=f(a)$. Comme $f(x)=0$, on a $a\in\ker f^2=\ker f$ donc $x=0$.
Par le théorème du rang, on conclut.

Exercice 43 : [énoncé]
(i) $\Rightarrow$ (ii) : ok
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons $E=\mathrm{Im} f+\ker f$.
L'inclusion $\mathrm{Im} f^2\subset\mathrm{Im} f$ est vraie indépendamment de l'hypothèse.
$\forall y\in\mathrm{Im} f$, $\exists x\in E$ tel que $y=f(x)$. Or on peut écrire $x=u+v$ avec $u\in\mathrm{Im} f$ et $v\in\ker f$.
Puisque $u\in\mathrm{Im} f$, on peut écrire $u=f(a)$ avec $a\in E$. On a alors $y=f(f(a)+v)=f^2(a)+f(v)=f^2(a)\in\mathrm{Im} f^2$. Ainsi $\mathrm{Im} f\subset\mathrm{Im} f^2$ puis l'égalité.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons $\mathrm{Im} f^2=\mathrm{Im} f$.
Par le théorème du rang : $\dim E=\mathrm{rg} f+\dim\ker f=\mathrm{rg} f^2+\dim\ker f^2$ donc $\dim\ker f=\dim\ker f^2$.
De plus l'inclusion $\ker f\subset\ker f^2$ est toujours vraie.
Par inclusion et égalité des dimensions : $\ker f=\ker f^2$.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons $\ker f=\ker f^2$.
Soit $y\in\mathrm{Im} f\cap\ker f$. On peut écrire $y=f(x)$ avec $x\in E$. Or $f(y)=0$ donc $f^2(x)=0$. Ainsi $x\in\ker f^2=\ker f$ et par suite $y=f(x)=0$. Finalement $\mathrm{Im} f\cap\ker f=\{0\}$.
De plus, par le théorème du rang $\dim E=\dim\mathrm{Im} f+\dim\ker f$ donc $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 44 : [énoncé]
$g\circ f=\tilde{0}$ donne $\mathrm{Im} f\subset\ker g$ donc $\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim\ker g=\dim E-\mathrm{rg}(g)$. Par suite $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\leqslant\dim E$.
$f+g$ bijectif donne $\mathrm{Im} f+g=E$. Or $\mathrm{Im} f+g\subset\mathrm{Im} f+\mathrm{Im} g$ d'où $\dim E\leqslant\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)$.

Exercice 45 : [énoncé]
Puisque $u^3=\tilde{0}$, on a $\mathrm{Im} u^2\subset\ker u$ et donc
$$\mathrm{rg} u^2\leqslant\dim\ker u$$
Or par la formule du rang
$$\mathrm{rg} u+\dim\ker u=\dim E$$
donc
$$\mathrm{rg} u+\mathrm{rg} u^2\leqslant\dim E$$

Exercice 46 : [énoncé]
On a

$$\dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v) = \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v - \dim(\mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v) = \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v - \dim E$$

et

$$\dim(\ker u \cap \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim(\ker u + \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim E$$

donc en sommant

$$\dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v) + \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

car en vertu du théorème du rang

$$\dim E = \mathrm{rg}u + \dim\ker u = \mathrm{rg}v + \dim\ker v$$

Par suite

$$\dim(\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v) = \dim(\ker u \cap \ker v) = 0$$

et donc

$$\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v = \ker u \cap \ker v = \{0_E\}$$

Les espaces $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Im}v$ sont supplémentaires dans E. De même pour $\ker u$ et $\ker v$.

Exercice 47 : [énoncé]
On a

$$f = f \circ \mathrm{Id} = f^2 + f \circ g$$

Montrons $f \circ g = \tilde{0}$ en observant $\mathrm{Im}g \subset \ker f$.
Pour cela montrons $\mathrm{Im}g = \ker f$ en observant

$$\mathrm{rg}g = \dim\ker f \text{ et } \ker f \subset \mathrm{Im}g$$

Puisque $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = \dim E$ et puisque par la formule du rang,
$\mathrm{rg}f + \dim\ker f = \dim E$, on peut affirmer $\mathrm{rg}g = \dim\ker f$.
D'autre part, pour $x \in \ker f$, on a $x = f(x) + g(x) = g(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}g$. Ainsi $\ker f \subset \mathrm{Im}g$.
Par inclusion et égalité des dimension $\ker f = \mathrm{Im}g$ puis $f \circ g = \tilde{0}$ donc $f^2 = f$.
Ainsi f est un projecteur et $g = \mathrm{Id} - f$ est son projecteur complémentaire.

Exercice 48 : [énoncé]
Si un tel endomorphisme f existe alors

$$\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim \ker f = 2\mathrm{rg}(f)$$

donc n est pair.
Inversement si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$
Si $p = 0$, l'endomorphisme nul convient.
Si $p > 0$, soit $e = (e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = 0_E, \dots, f(e_p) = 0_E, f(e_{p+1}) = e_1, \dots, f(e_{2p}) = e_p$$

Pour cet endomorphisme, il est clair que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker f$.
Par suite $\dim \mathrm{Im}f, \dim\ker f \geqslant p$ et par le théorème du rang
$\dim \mathrm{Im}f, \dim\ker f = p$.
Par inclusion et égalité des dimensions

$$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker f$$

Exercice 49 : [énoncé]
a) $\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}f^{p+1}$, $\exists \vec{x} \in E$, $\vec{y} = f^{p+1}(\vec{x}) = f^p(f(\vec{x})) \in \mathrm{Im}f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.
$\forall \vec{x} \in \ker f^p$, on a $f^p(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $f^{p+1}(\vec{x}) = f(\vec{o}) = \vec{o}$ puis $\vec{x} \in \ker f^{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.
b) La suite $\dim I_p$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dim I_s = \dim I_{s+1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $I_s = I_{s+1}$.
De plus, par le théorème du rang :
$\dim N_s = \dim E - \dim I_s = \dim E - \dim I_{s+1} = \dim N_{s+1}$.
Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $N_s = N_{s+1}$.
c) Montrons par récurrence sur $s \geqslant r$ que $I_s = I_r$.
La propriété est vraie au rang r.
Supposons la propriété vraie au rang s.
On sait déjà que $I_{s+1} \subset I_s$.
$\forall \vec{y} \in I_s$, $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f^s(\vec{x}) = f^{s-r}(f^r(\vec{x}))$.
Or $f^r(\vec{x}) \in I_r = I_{r+1}$ donc $\exists \vec{u} \in E$ tel que $f^r(\vec{x}) = f^{r+1}(\vec{u})$ et alors $\vec{y} = f^{s+1}(\vec{u}) \in I_{s+1}$.
Ainsi $I_{s+1} = I_s$ puis, par hypothèse de récurrence : $I_{s+1} = I_r$.
Par le théorème du rang : $\dim N_r + \dim I_r = \dim E = \dim N_s + \dim I_s$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\forall s \geqslant r, N_s = N_r$.
d) Soit $\vec{x} \in I_r \cap N_r$. Il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{x} = f^r(\vec{u})$ et on a $f^r(\vec{x}) = \vec{o}$.
Par suite $\vec{u} \in N_{2r}$, or $N_{2r} = N_r$ donc $\vec{x} = f^r(\vec{u}) = \vec{o}$. Par suite $I_r \cap N_r = \{\vec{o}\}$.

De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

Exercice 50 : [énoncé]
a) Si $\vec{x} \in \ker h$ alors $\vec{x} \in \ker g \circ f$ et si $\vec{x} \in \ker f$ alors $\vec{x} \in \ker g \circ f$ donc $\ker h + \ker f \subset \ker g \circ f$.
Inversement, soit $\vec{x} \in \ker g \circ f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in H$ et $\vec{v} \in \ker f$.
$(g \circ f)(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $h(\vec{u}) = (g \circ f)(\vec{u}) = \vec{o}$ d'où $\vec{x} \in \ker h + \ker f$.
b) f réalise une bijection de H vers $\mathrm{Im} f$ donc $\mathrm{rg}(h) = \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{Im} f})$
$\mathrm{rg}(g_{|\mathrm{Im} f}) + \dim \ker g_{\mathrm{Im} f} = \dim \mathrm{Im} f$ donc
$\mathrm{rg}(h) = \mathrm{rg}(f) - \dim \ker g_{|\mathrm{Im} f} \geqslant \mathrm{rg}(f) - \dim \ker g$.
c) $\dim \ker g \circ f \leqslant \dim \ker h + \dim \ker f$.
$\dim \ker h = \dim H - \mathrm{rg}(h) \leqslant \mathrm{rg}(f) - (\mathrm{rg} f - \dim \ker g) \leqslant \dim \ker g$ puis l'inégalité voulue.

Exercice 51 : [énoncé]
$\ker \varphi$ est un hyperplan de E et $\mathrm{Vect} u$ une droite car $u \neq 0_E$ puisque $u \notin \ker \varphi$.
$\ker \varphi + \mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\ker \varphi$, donc de dimension $n - 1$ ou n.
Si $\dim \ker \varphi + \mathrm{Vect}(u) = n - 1$ alors par inclusion et égalité des dimensions

$$\ker \varphi + \mathrm{Vect}(u) = \ker \varphi$$

Or $u \in \ker \varphi + \mathrm{Vect}(u)$ et $u \notin \ker \varphi$. Ce cas est donc exclu.
Il reste $\dim \ker \varphi + \mathrm{Vect}(u) = n$ i.e.

$$\ker \varphi + \mathrm{Vect}(u) = E$$

Comme de plus

$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Vect}(u) = n - 1 + 1 = n = \dim E$$

on peut affirmer que la somme est directe et donc $\ker \varphi$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 52 : [énoncé]
Soit φ une forme linéaire ne s'annulant pas sur x. Celle-ci n'est pas combinaison linéaire de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$. Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n = \dim E^\star$ éléments de $E^\star$.

Exercice 53 : [énoncé]
$u, v \in H$ car ces vecteurs vérifient l'équation définissant H.
(u, v) est libre et $\dim H = 2$ car H est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
On secoue, hop, hop, le résultat tombe.

Exercice 54 : [énoncé]
Si $f = 0$ la propriété est immédiate.
Sinon $f^2 = 0$ donne $\mathrm{Im} f \subset \ker f$ et en vertu du théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f = 1$.
Soit a un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Im} f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha.a$. Posons $\varphi(x) = \alpha$ ce qui définit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Les identités

$$f(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x + \mu y)a$$

et

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = (\lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y))a$$

avec $a \neq 0_E$ donnent la linéarité

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$$

L'application φ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.