Fonctions à paramètre Classiques

Exercice (Fonction gamma d'Euler)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \; converge \;\Leftrightarrow\; x > 0$$

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

2) Vérifier que $\Gamma(1) = 1$.

3) i) Montrer que

$$\forall x > 0,\; \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ii) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \Gamma(n) = (n-1)!$$

4) Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

5) i) Montrer que

$$\forall x > 0,\; \forall n \in \mathbb{N}^*,\; la\ fonction\ t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\ est\ integrable\ sur\ ]0, +\infty[$$

ii) Montrer alors que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \forall x > 0,\; \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}dt$$

iii) Justifier que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.